



多次利用勾股定理来求呀！只要增加一条辅助线就可以啦！让我们一起来试试吧！

在直角三角形中加一条锐角的角平分线，那线段的长度怎么求呢？



模型讲解

名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



名师小技巧

看到直角三角形锐角平分线，考虑运用勾股定理求解。

1 在已知直角三角形中利用勾股定理求出未知边长；

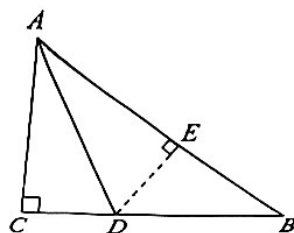
2 设未知数，在新形成的直角三角形中利用勾股定理列方程求解。

模型巧记

见角平分线，求长度，先把垂直两边作，最后勾股定理来求解。

【模型】如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，已知 $AC=6$ ， $BC=8$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，求 DC 的长。

【解析】如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，



则 $\triangle ACD \cong \triangle AED$ (AAS)，

$\therefore AE = AC = 6$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理

得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$

$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

易知 $EB = AB - AE = 10 - 6 = 4$ 。

设 $DC = x$ ，

则 $DE = x$ ， $DB = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中，由勾股定理

得 $(8-x)^2 = 4^2 + x^2$ ，

解得 $x = 3$ ， $\therefore DC = 3$ 。

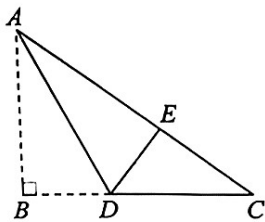
利用勾股定理
求出未知边长

设未知数，利用
勾股定理列方程

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图,有一块直角三角形纸片,两直角边 $AB=6$, $BC=8$,将 $\triangle ABC$ 折叠,使 AB 落在斜边 AC 上,点 B 落在点 E 处,折痕为 AD ,则 BD 的长为().



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】 $\because \triangle ABC$ 为直角三角形, $AB=6$, $BC=8$,

$\therefore$ 根据勾股定理得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.

易知 $EC = AC - AE = 10 - 6 = 4$.

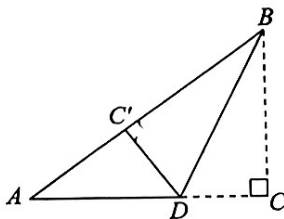
设 $BD = x$, 由折叠性质可知 $DE = BD = x$,

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 根据勾股定理得 $(8-x)^2 = 4^2 + x^2$,

解得 $x=3$. 故选 A.

典例2 ☆☆☆☆☆

如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, 将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折叠, 使点 C 落在边 AB 上的点 C' 处, 则折痕 BD 的长为().



- A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】 $\because \angle C=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, $\therefore AB=10$.

根据折叠的性质, 得 $BC=BC'$, $CD=DC'$,

易知 $AC' = AB - C'B = 10 - 6 = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle AC'D$ 中, 设 $DC' = x$, 则 $AD = 8 - x$,

根据勾股定理得 $(8-x)^2 = x^2 + 4^2$, 解得 $x=3$, $\therefore CD=3$.

$\therefore BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$. 故选 C.



名师点拨

在新形成的 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中利用勾股定理列方程求解.

趣味小百科

角平分线的性质:

1 由角平分线可以得到两个相等的角.

2 角平分线上的点到角两边的距离相等.

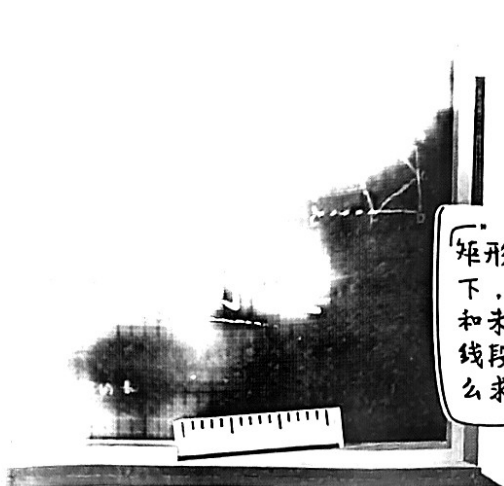
3 三角形的三条角平分线交于一点, 称作三角形的内心. 三角形的内心到三角形三边的距离相等.

4 三角形一个角的平分线分对边所成的两条线段与这个角的两邻边对应成比例.

趣味小百科

角平分线的判定:

角的内部到角的两边距离相等的点, 都在这个角的平分线上.

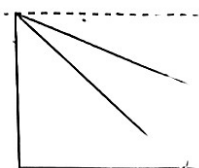


这个图形我们还是要利用勾股定理去求的，只要找到新的直角三角形就可以啦！让我们一起来学习一下吧！

矩形的一角折叠一下，求折叠的部分和未折叠的部分的线段长度，这可怎么求呀？

模型讲解

【模型1】(折在里) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=5$ ，折叠矩形 $ABCD$ ，使点 D 落在边 BC 上的点 F 处，折痕为 AE ，求 EC 的长。



【思路】先利用折叠和矩形性质找出线段之间的关系，再落脚在折叠后形成的直角三角形中，设未知数，利用勾股定理列方程求解。

【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, AD = BC = 5, CD = AB = 3.$$

根据折叠的性质得

$$\triangle AFE \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore AF = AD = 5, EF = ED;$$

利用矩形和折叠的性质
找出线段之间的关系

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore FC = BC - BF = 5 - 4 = 1.$$

$$\text{设 } EC = x, \text{ 则 } EF = ED = CD - EC = 3 - x.$$

在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中，由勾股定理得

$$FC^2 + EC^2 = EF^2,$$

$$\text{即 } 1^2 + x^2 = (3 - x)^2,$$

在折叠后形成的直角三角形中设未知数，
利用勾股定理列方程

$$\text{解得 } x = \frac{4}{3}. \text{ 故 } EC \text{ 的长为 } \frac{4}{3}.$$



名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



名师小技巧

解决矩形翻折问题：

- 1 利用折叠和矩形性质找出线段之间的关系；
- 2 在折叠后形成的直角三角形中设未知数，利用勾股定理列方程求解。



模型巧记

见矩形，有翻折，折前折后边相等，找出新出现的直角三角形，勾股定理来求解。



名师小技巧

翻折的性质:

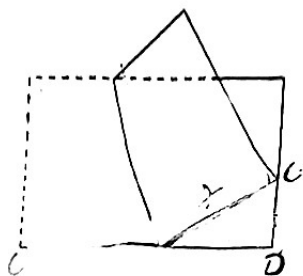
1 翻折变换(折叠问题)

实质上就是轴对称变换.

2 折痕是对称轴,对应点的连线被折痕垂直平分.

3 折叠前后的两部分图形全等,对应角、对应线段、面积都相等.

【模型2】(折出去) 如图所示, 矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 使点 C 落在边 AD 的中点 C' 处, 点 B 落在 B' 处, 其中 $AB=18$, $BC=12$, 求 FC' 的长.



【思路】先利用折叠和矩形性质找出线段之间的关系, 再落脚在折叠后形成的直角三角形中, 设未知数, 利用勾股定理列方程求解.

【解析】 $\because BC=12$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 点 C' 为 AD 的中点,
 $\therefore AD=BC=12$, $CD=AB=18$,
 $\therefore C'D=6$.

利用矩形和折叠的性质找出线段之间的关系

设 $FC=FC'=x$,

则 $FD=18-x$.

在 $Rt\triangle FDC'$ 中,

由勾股定理得

$$FC'^2 = FD^2 + C'D^2,$$

在折叠后形成的直角三角形中设未知数, 利用勾股定理列方程

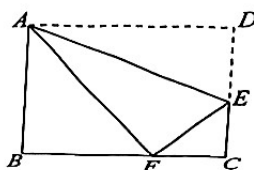
即 $x^2 = (18-x)^2 + 6^2$, 解得 $x=10$.

故 FC' 的长为 10.

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图所示, 沿着 AE 折叠长方形, 使点 D 落在边 BC 上的点 F 处, 已知 $AB=8$ cm, $BC=10$ cm, 则 EC 的长为 ().



A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 6 cm



名师点拨

先利用全等和矩形性质找出线段之间的关系, 再落脚在新形成的 $Rt\triangle EFC$ 中, 利用勾股定理列方程求解.

【答案】A

【解析】根据折叠的性质得 $\triangle ADE \cong \triangle AFE$,

$$\therefore AF = AD = 10 \text{ cm}, EF = DE,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 (\text{cm}).$$

$$\therefore CF = BC - BF = 10 - 6 = 4 (\text{cm}).$$

设 $EC = x \text{ cm}$, 则 $EF = (8 - x) \text{ cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $CF^2 + CE^2 = EF^2$, 即 $4^2 + x^2 = (8 - x)^2$,

解得 $x = 3$. 故 EC 的长为 3 cm. 故选 A.

典例2 ☆☆☆☆☆

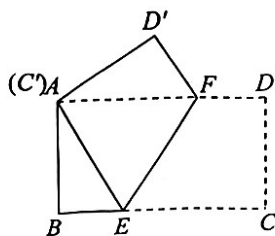
如图所示, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, 现将其沿 EF 对折, 使得点 C 与点 A 重合, 则 AF 的长为().

A. $\frac{25}{8} \text{ cm}$

B. $\frac{25}{4} \text{ cm}$

C. $\frac{25}{2} \text{ cm}$

D. 8 cm



【答案】B

【解析】设 $AF = x \text{ cm}$, 则 $DF = (8 - x) \text{ cm}$.

$\because$ 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, 将其沿 EF 折叠后, 点 C 与点 A 重合, $\therefore DF = D'F$.

在 $\text{Rt}\triangle AD'F$ 中, $AF^2 = AD'^2 + D'F^2$,

即 $x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$, 解得 $x = \frac{25}{4}$. 故 $AF = \frac{25}{4} \text{ cm}$. 故选 B.

典例3 ☆☆☆☆☆

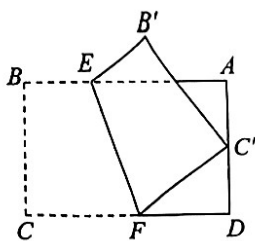
如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 使点 C 落在 AD 边的中点 C' 处, 点 B 落在点 B' 处, 其中 $AB = 9$, $BC = 6$, 则 FC' 的长为().

A. $\frac{10}{3}$

B. 4

C. 4.5

D. 5



【答案】D

【解析】由题意, 设 $FC = FC' = x$, 则 $FD = 9 - x$.

$\because BC = 6$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 点 C' 为 AD 的中点,

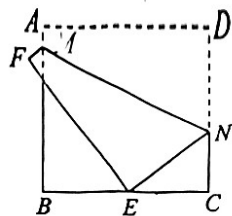
$\therefore AD = BC = 6$, $C'D = 3$.

在 $\text{Rt}\triangle FC'D$ 中, $FC'^2 = FD^2 + C'D^2$, 即 $x^2 = (9 - x)^2 + 3^2$,

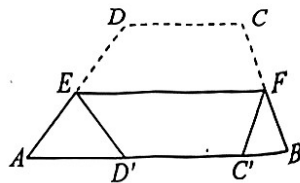
解得 $x = 5$. 故 FC' 的长为 5. 故选 D.

趣味小百科

正方形的翻折:

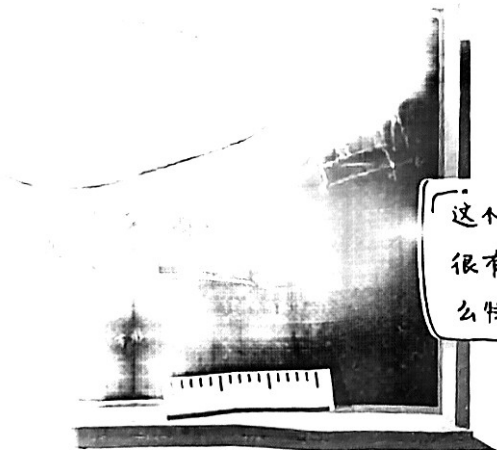


梯形的翻折:

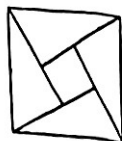


名师点拨

先利用折叠和矩形性质找出线段之间的关系, 再落脚在新形成的 $\text{Rt}\triangle FC'D$ 中, 利用勾股定理列方程求解.



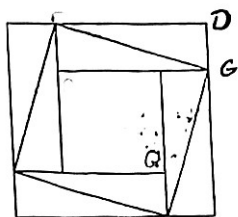
个图形叫赵爽弦图，是赵爽
明勾股定理的，它可是有不少特性
呢！仔细观察，你能发现几个呢？



这个图形看上去
很有趣，它有什
么特性吗？



模型讲解



名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



【结论1】 如图所示，在正方形 $ABCD$ 的四边 AB ， BC ， CD ， DA 上分别取点 E ， H ， G ， F ，使得 $BE=CH=GD=AF$ ，则四边形 $EHGF$ 是正方形。

【证明】 $\because$ 在正方形中， $BE=CH=GD=FA$ ，

$$\therefore AE=BH=CG=FD,$$

$$\text{又} \because \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle AEF \cong \text{Rt} \triangle BHE \cong \text{Rt} \triangle CGH \cong \text{Rt} \triangle DFG,$$

$$\therefore EF=HE=GH=FG, \angle AFE=\angle BEH.$$

$$\because \angle AEF+\angle AFE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF+\angle BEH=90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EHGF$ 是正方形。

【结论2】 如图所示，在正方形 $ABCD$ 的四边 AB ， BC ， CD ， DA 上分别取点 E ， H ， G ， F ，使得 $BE=CH=GD=AF$ ，此外 $EQ \parallel BC$ ， $HP \parallel CD$ ， $GO \parallel DA$ ， $FR \parallel AB$ ，则四边形 $ORQP$ 是正方形。

【证明】 $\because EQ \parallel BC$ ， $HP \parallel CD$ ， $GO \parallel AD$ ， $FR \parallel AB$ ，且 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ ，

三国时期吴国的数学家
赵爽创制了这幅“赵爽
弦图”，用数形结合的方
式，最早完成了对勾股
定理的证明。正方形 $FE-$
 HG 由四个全等的直角
三角形和一个小正方形
 $ORQP$ 构成。设 EF 的长
为 c ， ER 的长为 a ， FR
的长为 b ，

$$\because S_{\text{正方形}EHGF} = 4S_{\triangle FRE} +$$

$$S_{\text{正方形}ORQP}, \therefore c^2 = 4 \times$$

$$\frac{1}{2}ab + (b-a)^2, \text{整理得}$$

$$\text{到 } c^2 = a^2 + b^2.$$

模型巧记

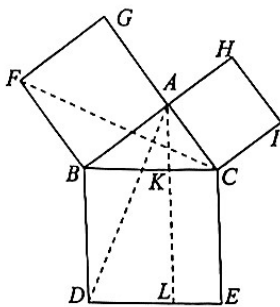
赵爽弦图,可以证明勾股定理,也可以研究如何拼正方形.四个全等的直角三角形和一个小正方形可以拼成一个大正方形.

名师点拨

一个小正方形加上四个全等的直角三角形能拼成一个大正方形(大正方形的边长为直角三角形的斜边,小正方形的边长为直角三角形长直角边减去短直角边).

趣味小百科

欧几里得证明勾股定理的图形



$\therefore$ 四边形 AFRE、四边形 EBHQ、四边形 HCGP、四边形 FOGD 均为长方形,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle RFE \cong \triangle BHE \cong \triangle QEH \cong \triangle CGH \cong \triangle PHG \cong \triangle DFG \cong \triangle OGF$,

$\therefore FR = EQ = HP = GO, ER = HQ = GP = FO$,

$\therefore OR = RQ = QP = PO$, 且 $\angle POR = 180^\circ - \angle FOG = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ORQP 为正方形.

【结论3】如图所示,在正方形 ABCD 的四边 AB, BC, CD, DA 上分别取点 E, H, G, F, 使得 $BE = CH = GD = AF$, 此外 $EQ \parallel BC, HP \parallel CD, GO \parallel DA, FR \parallel AB$,

则 (1) $S_{\text{正方形} ABCD} = 4S_{\triangle AEF} + S_{\text{正方形} EHG}$;

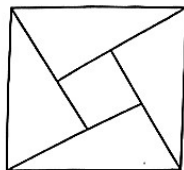
(2) $S_{\text{正方形} EHG} = 4S_{\triangle FRE} + S_{\text{正方形} ORQP}$;

(3) $S_{\text{正方形} ABCD} - S_{\text{正方形} EHG} = S_{\text{正方形} EHG} - S_{\text{正方形} ORQP}$.

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

“赵爽弦图”巧妙地利用面积关系证明了勾股定理,是我国古代数学的骄傲.如图所示的“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形.设直角三角形的较长直角边长为 a , 较短直角边长为 b . 若 $ab = 8$, 大正方形的面积为 25, 则小正方形的边长为 ().



A. 9

B. 6

C. 4

D. 3

【答案】D

【解析】设小正方形的边长为 $x (x > 0)$,

因为 $S_{\text{大正方形}} = S_{\text{小正方形}} + 4S_{\text{直角三角形}}$, $S_{\text{直角三角形}} = \frac{1}{2}ab$,

所以 $25 = 2 \times 8 + x^2$, 所以 $x = 3$.

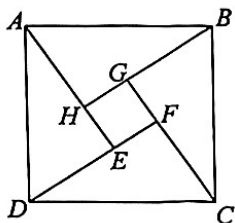
故选 D.

典例2 ☆☆☆☆☆

如图, $\triangle ABH$, $\triangle BCG$, $\triangle CDF$ 和 $\triangle DAE$ 是四个全等的直角三角形, 四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形, 如果 $AB=10$, $EF=2$, 那么 AH 等于().

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 5

【答案】B



【解析】 $\because AB=10, EF=2$,

$\therefore$ 大正方形的面积是 100, 小正方形的面积是 4,

$\therefore$ 四个直角三角形的面积和为 $100-4=96$.

设 $AE=a, DE=b$,

$$\text{则 } 4 \times \frac{1}{2}ab = 96,$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 = 100,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 100 + 96 = 196, \therefore a+b=14,$$

$$\text{又 } a-b=2,$$

$$\therefore a=8, b=6, \therefore AH=DE=6.$$

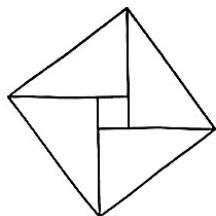
故选 B.

典例3 ☆☆☆☆☆

如图, 有 4 个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成一个大正方形, 若大正方形的面积是 17, 小正方形的面积是 5, 直角三角形较长直角边为 a , 较短直角边为 b , 则 ab 的值是().

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【答案】B



【解析】由模型结论可得四个直角三角形的面积是 $\frac{1}{2}ab \times 4 = 17 -$

$$5 = 12, \text{ 即 } ab = 6.$$

故选 B.

名师点拨

看到出现赵爽弦图模型的题目, 要考虑采用数形结合的思想.

名师小技巧

常见的勾股数组合

3, 4, 5;

5, 12, 13;

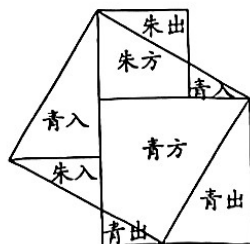
6, 8, 10;

8, 15, 17;

9, 12, 15.

趣味小百科

青朱出入图证明勾股定理





这个题目的意思其实就是竹子折断了，顶端接触了地面，至于该怎么求解，你仔细观察一下图形，你就会有思路啦！

折竹抵地，这是什么意思，又该怎样求解呢？



模型讲解

“风吹树折”问题又称为“折竹抵地”，源自《九章算术》，原文为：“今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？”意思是：一根竹子，原高一丈，一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 3 尺远，则折断后的竹子高度为多少尺？（1 丈 = 10 尺）



【模型】 如图所示，折断后的两段竹子与地面形成一直角三角形，其中一直角边长三尺，其余两边长度之和为 10 尺。

【思路】 根据勾股定理建立方程，求出折断后的竹子高度为 4.55 尺。

【解析】 设折断后的竹子高度为 x 尺，则被折断的竹子长度为 $(10-x)$ 尺：

$$\text{由勾股定理得 } x^2 + 3^2 = (10-x)^2,$$

解得 $x = 4.55$ 。

答：折断后竹子的高度是 4.55 尺。



更多精彩内容
请扫码观看



此模型主要考查勾股定理的运用。在此模型中，已知三角形一条直角边的长度与其余两条边长度之和，即可设所求的一边长度为 x ，通过勾股定理建立方程，求出答案。

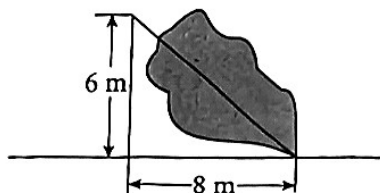


见到树被折断，一定要想到勾股定理。

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

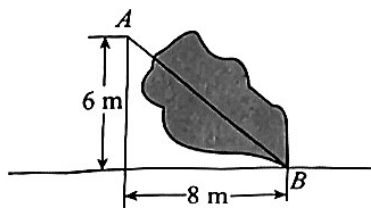
由于台风的影响，一棵树在离地面 6 m 处折断，树顶落在离树干底部 8 m 处，则这棵树在折断前（不包括树根）的高度是（ ）。



- A. 8 m B. 10 m C. 16 m D. 18 m

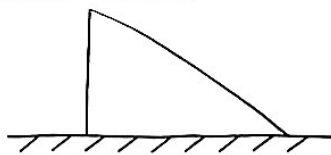
【答案】C

【解析】如图，根据勾股定理得 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{m})$ ，
所以大树的高度是 $10 + 6 = 16(\text{m})$ 。
故选 C。



典例2 ☆☆☆☆☆

如图，已知一根长 8 m 的竹竿在离地面 3 m 处断裂，竹竿顶部抵着地面，此时，顶部距底部 _____ m。



【答案】4

【解析】设竹竿顶部距离底部 x m，
则 $3^2 + x^2 = (8-3)^2$ ，
解得 $x=4$ 。
故竹竿顶部距离底部 4 m。

名师点拨

在折构成的直角三角形中，斜边加竖直直角边为树高。

趣味小百科

1971 年 5 月 15 日，尼加拉瓜发行了一套主题为“改变世界面貌的十个数学公式”的邮票，这十个数学公式是由著名数学家选出的，勾股定理便是其中之一。

这是印度的数学家提出的荷花问题，这类题目我们只要把它翻译成数学模型就可以轻松解决啦！

老师您看，数学题目里出现了诗句，这样的题怎么解呢？

模型讲解

名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



名师点拨

根据题意构造出直角三角形（即荷花吹歪与不至时恰好构成直角三角形），再根据已知条件运用勾股定理求解。

模型巧记

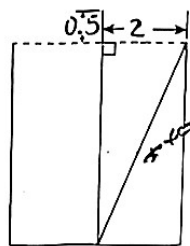
见到出水芙蓉，一定要想到勾股定理。

“印度荷花问题”

湖静浪平六月天，荷花半尺出水面；
忽来一阵狂风急，吹倒花儿水中偃。
湖面之上不复见，入秋渔翁始发现；
残花离根二尺遥，试问水深尽若干？

——印度数学家拜斯迦罗（公元 1114—1185 年）

【模型】如图所示，荷花出水 0.5 尺，被风吹至一边，花朵下部与水面平齐，且与原根部的水平距离为 2 尺，求水深。



【思路】利用勾股定理建立方程，求出水深为 3.75 尺。

【解析】设水深 x 尺，则荷花花茎的长度为 $(x+0.5)$ 尺，

根据勾股定理得 $(x+0.5)^2 = x^2 + 4$ 。

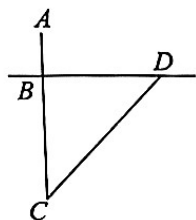
解得 $x = 3.75$ 。

答：水深 3.75 尺。

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

古诗赞美荷花：“竹色溪下绿，荷花镜里香。”平静的湖面上，一朵荷花亭亭玉立，露出水面 10 cm，忽见它随风倾斜，花朵恰好浸入水面，仔细观察，发现荷花偏离原地 40 cm(如图)，请问水深多少？



【解析】设水深为 h cm，则荷花的高为 $(h+10)$ cm，

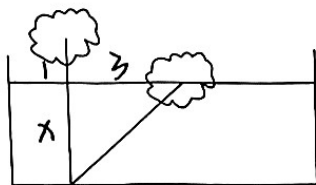
根据勾股定理，得 $(h+10)^2 = 40^2 + h^2$ ，

解得 $h=75$ 。

答：水深为 75 cm。

典例2 ☆☆☆☆☆

有一朵荷花，花朵高出水面 1 尺，一阵大风把它吹歪，使花朵刚好落在水面上，此时花朵离原位置的的水平距离为 3 尺，此水池的水深有多少尺？



【解析】设水深 x 尺，那么荷花径的长为 $(x+1)$ 尺，

由勾股定理得 $x^2 + 3^2 = (x+1)^2$ 。

解得 $x=4$ 。

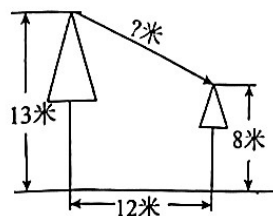
答：水池的水深有 4 尺。



名师点拨

读懂题意，转化成数学模型。注意多项式带单位要加括号。

趣味题目

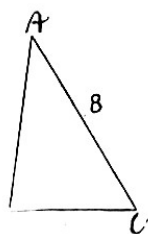




模型讲解

当我们遇到两个三角形的三边长分别为 3, 7, 8 和 5, 7, 8 的时候，通常不会对它们进行处理，实际是因为我们对于这两组数字不敏感，但如果将这两个三角形拼在一起，你将惊喜地发现这是一个边长为 8 的等边三角形。

【模型】如图所示，当两个三角形的边长分别为 3, 7, 8 和 5, 7, 8 时，求这两个三角形的面积。



【解析】如图 1，过点 A 作 BC 边的垂线，交 BC 的延长线于点 D。设 CD 长为 x ，则 BD 长为 $x+3$ ，根据两个三角形 ($\triangle ABC$, $\triangle ABD$) 高相同，利用勾股定理可求出 $x=1$ ，高 AD 为 $4\sqrt{3}$ ，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ 。

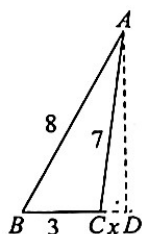


图 1

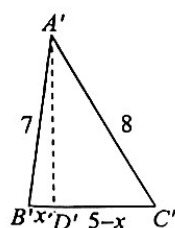


图 2

如图 2，过点 A' 作 $B'C'$ 边的垂线，交 $B'C'$ 于点 D' 。



更多精彩内容
请扫码观看



利用作高线的方法可以用勾股定理求普通三角形的面积。

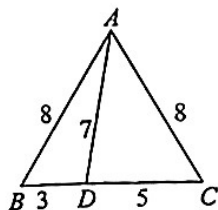


边长为 8 的等边三角形能分出边长是 3, 7, 8 和 5, 7, 8 的两个三角形，且 3, 8 和 5, 8 的夹角都是 60° 。



名师小技巧

遇到两个三角形的三边长分别为3,7,8和5,7,8时,要联想到等边三角形.



名师点拨

根据三角形的边长特性,判断其为等边三角形的一部分,高仍为等边三角形的高.



趣味小百科

三角形的三边关系:

设三角形三边分别为 a, b, c , 则

$a+b>c, a+c>b, b+c>a$;

$a-b<c, a-c<b, b-c<a$.

设 $B'D'$ 长为 x , 则 $C'D'$ 长为 $5-x$,

根据两个三角形 ($\triangle A'B'C', \triangle A'D'C'$) 高相同, 利用勾股定理可求出 $x=1$, 高 $A'D'$ 为 $4\sqrt{3}$,

所以 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $10\sqrt{3}$.

【总结】观察 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 这两个三角形, 得这两个三角形的高相等, 且有两边相等, 所以将这两个三角形拼在一起后构成一个边长为 8 的等边三角形, 且该等边三角形的高即为这两个三角形的高.

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=16, AC=14, BC=6$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

- A. $24\sqrt{3}$ B. $56\sqrt{3}$ C. 48 D. 112

【答案】A

【解析】因为该三角形的三边长的比为 $3:7:8$,

所以其可以和三边长的比为 $5:7:8$ 的三角形 (边长为 10, 14, 16) 拼成一个边长为 16 的等边三角形,

所以拼成的等边三角形的高为 $8\sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

故选 A.

典例2 ☆☆☆☆☆

已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=8, AC=7, BC=3$, 则 $\angle B = ()$.

- A. 45° B. 37° C. 60° D. 90°

【答案】C

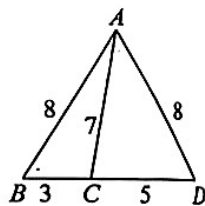
【解析】因为 $\triangle ABC$ 的边长为 3, 7, 8,

所以其可以和边长为 5, 7, 8 的三角形拼成一个边长为 8 的等边三角形, 如图.

观察图形可知 $\angle B$ 为等边三角形的一个内角,

所以 $\angle B = 60^\circ$.

故选 C.



要想让...就要考
虑不同的面能...让我们一
起来看看有几...

蚂蚁要想吃到蜂蜜，
该怎么走呢？

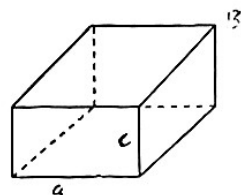
模型讲解

名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



【模型1】蚂蚁沿着长方体的表面爬行，从A到B的最短路径怎么算？



【作法】

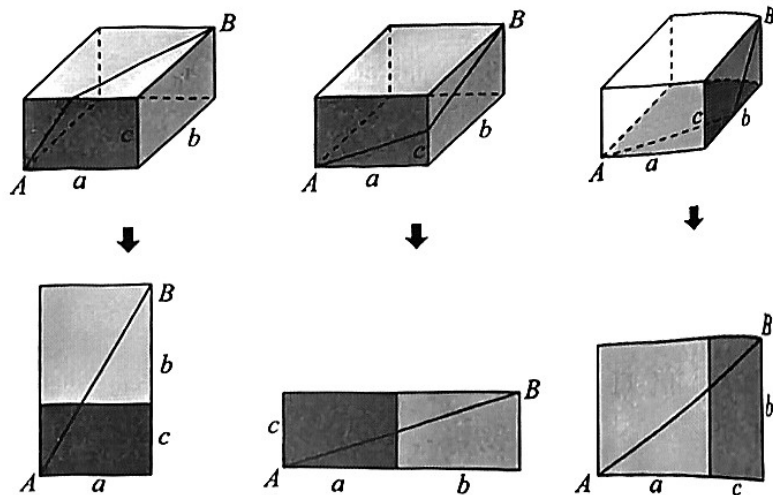


图 1

图 2

图 3

蚂蚁爬行的方式有 6 种，但是汇总起来，每两种的爬行长度一样，所以共有三大类（图 1，图 2，图 3）。

假设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c ，则这三大类的爬行长度分别为

$$① AB = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc};$$

$$② AB = \sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab};$$

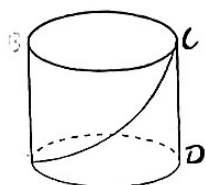
遇到蚂蚁爬行问题，一
定要分清不同情况对应
的不同结论。

$$\textcircled{3} AB = \sqrt{b^2 + (a+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}.$$

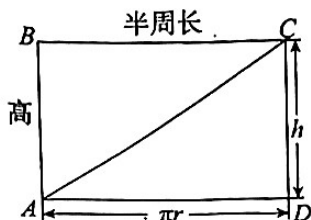
由此可见, ac, ab, bc 谁小, 该类爬行方式所得结果就小.

【结论】最小值 = $\sqrt{\text{最长边}^2 + (\text{最短边} + \text{较短边})^2}$.

【模型2】蚂蚁沿着圆柱体的表面爬行, 从A到C的最短路径怎么算?



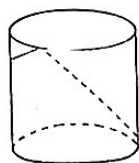
【作法】将圆柱的侧面展开如图所示.



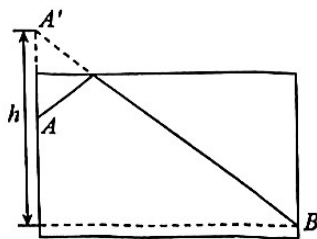
由图可知蚂蚁爬行的最短路径的长度为直角三角形的斜边长, 所以 $AC = \sqrt{(\pi r)^2 + h^2} = \sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$.

【结论】异侧半周长.

【模型3】蚂蚁吃蜂蜜问题: 求蚂蚁从A沿着外壁爬行再沿着内壁爬行到B的最短路径.



【作法】如图, 首先找到A关于杯子上沿的对称点A'点, 设A'到B的竖直距离为h, 则问题转化为异侧半周长的问题.

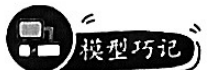


由图可知蚂蚁爬行的最短路径长为

$$A'B = \sqrt{(\pi r)^2 + h^2} = \sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}.$$



关于蚂蚁爬行的最短距离问题, 我们通常是通过展开立体图形, 化立体为平面, 化曲线或折线为直线, 利用“两点之间, 线段最短”解决问题.



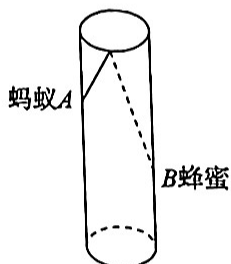
沿长方体表面爬行的路径, 两条较短的边相加与较长的边组成直角三角形, 用勾股定理求斜边.



沿圆柱体表面爬行, 异侧半周长, 同侧全周长.

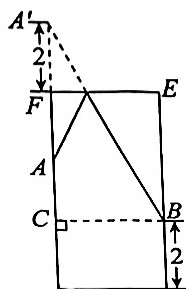
☆☆☆☆☆

例3 圆柱形容器高为 6 cm,底面周长为 6 cm,在容器内壁离点 B 处有一滴蜂蜜,此时一只蚂蚁正好在容器外壁,离点 B 处 2 cm 与蜂蜜相对的点 A 处,则蚂蚁从外壁 A 处到达内壁 B 处的最短距离为 _____ cm.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】如图,将容器侧面展开,作 A 关于 EF (容器上沿) 的对称点 A',连接 A'B,过 B 作 $BC \perp FA$ 于点 C,



$$A'B = \sqrt{A'C^2 + BC^2} = \sqrt{(6-2+2)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}.$$

即蚂蚁从外壁 A 处到达内壁 B 处的最短距离为 $3\sqrt{5}$ cm.

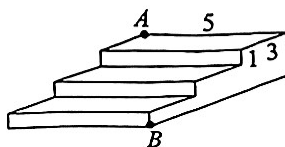


名师点拨

蚂蚁吃蜂蜜问题往往需要一次将军饮马.

趣味题目

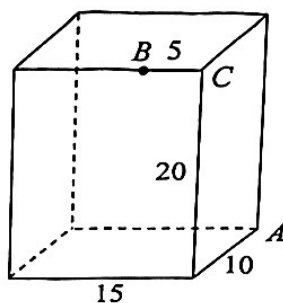
如图,从 A 到 B 的最短距离是多少?



典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图,长方体的长为15,宽为10,高为20,点B到点C的距离为5.一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点A爬行到点B,则需要爬行的最短距离是_____.



【答案】25

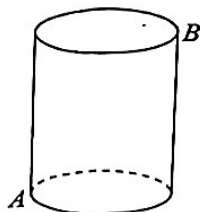
【解析】本题可看成蚂蚁是在长为5,宽为10,高为20的长方体表面爬行,根据蚂蚁沿长方体表面爬行的结论:

$$d_{\text{最小}} = \sqrt{\text{最长边}^2 + (\text{最短边} + \text{较短边})^2},$$

$$\text{可得 } d_{\text{最小}} = \sqrt{20^2 + (10+5)^2} = 25.$$

典例2 ☆☆☆☆☆

如图;一圆柱高为8 cm,底面半径为2 cm,一只蚂蚁在圆柱侧面爬行,从点A爬到点B处觅食,则要爬行的最短路程(π 取3)是().



A. 20 cm

B. 10 cm

C. 14 cm

D. 无法确定

【答案】B

【解析】根据蚂蚁在圆柱表面爬行的结论,可知

$$\begin{aligned} d_{\text{最小}} &= \sqrt{(\pi r)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{(3 \times 2)^2 + 8^2} \\ &= 10(\text{cm}). \end{aligned}$$

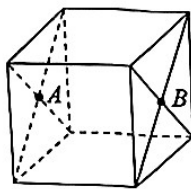
故选 B.

名师点拨

观察图形,构建出新的便于解题的立体图形.

趣味题目

如图,在该正方体中,从A到B有没有最短路径?

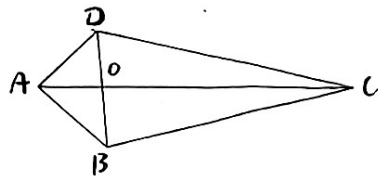




模型讲解

对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形。

【结论】如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC \perp BD$ ，垂足为点 O ，则 $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ 。



【证明】在 $\text{Rt}\triangle AOD$, $\text{Rt}\triangle BOC$, $\text{Rt}\triangle AOB$, $\text{Rt}\triangle COD$ 中，根据勾股定理得

$$OA^2 + OD^2 = AD^2, \textcircled{1}$$

$$OB^2 + OC^2 = BC^2, \textcircled{2}$$

$$OA^2 + OB^2 = AB^2, \textcircled{3}$$

$$OC^2 + OD^2 = CD^2, \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}, \text{得 } OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = AD^2 + BC^2,$$

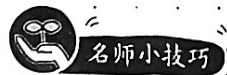
$$\textcircled{3} + \textcircled{4}, \text{得 } OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = CD^2 + AB^2.$$

综上所述， $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ 。



名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



名师小技巧

当遇到知三边求一边的四边形时，可以尝试证明该四边形的对角线互相垂直。



模型巧记

对角线互相垂直的四边形对边的平方和相等。

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

定义：我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形。

(1) 概念理解：如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB = AD$, $CB = CD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由。



名师小技巧

见垂直,想勾股定理;见四边形,想垂美四边形.



趣味小百科

垂美四边形的面积公式:

$$S = \frac{1}{2} (\text{对角线} \times \text{对角线}).$$



趣味小百科

一般四边形面积的计算方法:

1 利用切割法:将图形切割为两个三角形后计算.

2 利用增补法:把图形补为梯形或者其他特殊四边形进行计算.

(2)性质探究:如图2,垂美四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB, CD 与 BC, AD 之间有怎样的数量关系? 写出你的猜想,并说明理由.

(3)问题解决:如图3,分别以 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$, 连接 CE, BG, GE .

①求证: $\triangle GAB \cong \triangle CAE$.

②若 $AC=2, AB=5$, 则 $GE=$ _____.

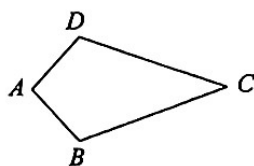


图1

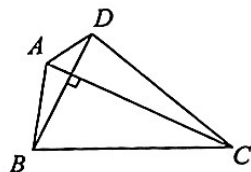


图2

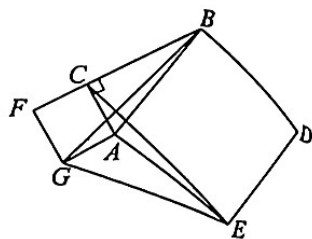


图3

【解析】(1) 四边形 $ABCD$ 是垂美四边形, 理由如下:

$\because AB=AD, \therefore$ 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\because CB=CD, \therefore$ 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上,

$\therefore$ 直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线,

$\therefore AC \perp BD$, 即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形.

(2) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, 理由如下:

如图, $\because AC \perp BD, \therefore \angle AED = \angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 90^\circ$.

由勾股定理得 $AD^2 + BC^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2$,

$$AB^2 + CD^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2,$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

(3) 如图, ①连接 CG, BE .

$\because \angle CAG = \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAG + \angle BAC = \angle BAE + \angle BAC$,

即 $\angle GAB = \angle CAE$.

在 $\triangle GAB$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AG=AC, \\ \angle GAB=\angle CAE, \\ AB=AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAB \cong \triangle CAE (\text{SAS}).$

② $\because \triangle GAB \cong \triangle CAE, \therefore \angle ABG = \angle AEC$,

又 $\because \angle AEC + \angle AME = 90^\circ, \angle BMC = \angle AME$,

$\therefore \angle ABG + \angle BMC = 90^\circ, \therefore \angle BNC = 90^\circ$, 即 $CE \perp BG$,

$\therefore$ 四边形 $CGEB$ 是垂美四边形, $\therefore CG^2 + BE^2 = CB^2 + GE^2$.

$\because AC=2, AB=5, \therefore BC = \sqrt{21}, CG = 2\sqrt{2}, BE = 5\sqrt{2}$,

$$\therefore GE^2 = CG^2 + BE^2 - CB^2 = 37, \therefore GE = \sqrt{37}.$$

