

一、前导知识

1、三角形全等判定定理

1.三组对应边分别相等的两个三角形全等(简称 SSS 或“边边边”),这一条也说明了三角形具有稳定性的原因。

2.有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(SAS 或“边角边”)。

3.有两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(ASA 或“角边角”)。

4.有两角及其一角的对边对应相等的两个三角形全等(AAS 或“角角边”)。

5.直角三角形全等条件有:斜边及一直角边对应相等的两个直角三角形全等(HL 或“斜边,直角边”)。

SSS, SAS, ASA, AAS, HL 均为判定三角形全等的定理。

注意:在全等的判定中,没有 AAA (角角角)和 SSA (边边角)(特例:直角三角形为 HL ,属于 SSA),这两种情况都不能唯一确定三角形的形状。

Tips

Q:边边角 (SSA) 就一定不能证明三角形全等吗?

两个角相加等于 90° , 叫互余; 两个角相加等于 180° , 叫互补

2、垂直平分线

1、线段的垂直平分线 (中垂线)

(1) 定义: 经过线段的中点并且垂直于这条线段的直线, 叫做线段的垂直平分线。

(2) 性质: **线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等。**

(3) 判定: **到一条线段两个端点距离相等的点, 在这条线段的垂直平分线上。**

(4) 画法: 线段 AB 的垂直平分线, 分别以线段 AB 两个端点为圆心, 大于 AB 长为半径画弧, 两弧交于两点 C, D , 则直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线。

2、轴对称

(1) 轴对称图形: 如果一个图形沿着某一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 这个图形就叫做轴对称图形。这条直线叫做对称轴。

(2) 轴对称: 把一个图形沿着某一条直线折叠, 如果能够与另一个图形完全重合, 就是说这两个图形关于这条直线对称, 这条直线是对称轴, 折叠后重合的点是对应点, 叫做对称点

(3) 性质:

①关于某条直线对称的两个图形是全等形

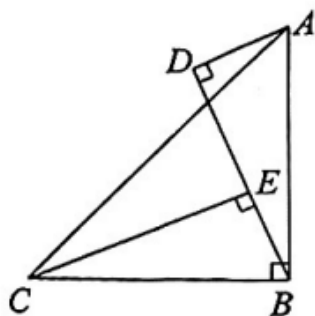
②如果两个图形关于某条子线对称, 那么对称轴是任何一对对应点所连接线段的垂直平分线;

③两个图形关于某一条直线对称, 如果它们的对应线段或者延长线相交, 那么交点在对称轴上。注: 轴对称图形一定是全等形, 全等的图形不一定成轴对称。

扩展阅读

二、练习题

1. (★★★★☆) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=CB$, $\angle ABC=90^\circ$, $AD \perp BD$ 于点 D , $CE \perp BD$ 于点 E . 若 $CE=5$, $AD=3$, 则 DE 的长是_____.



(第 1 题图)

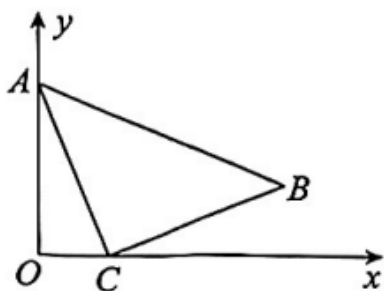
思路:

- 因题目告之 $AB=CB$, 同时 $\angle ABC=90^\circ$, 所以是一个等腰直角三角形。
- $\angle CBE + \angle DBA = \angle DBA + \angle DAB \therefore \angle CBE = \angle DAB$
- 又 $\because BC=AB$

根据直角三角形判断相等 AAS , $\therefore \triangle CEB \cong \triangle ADB$

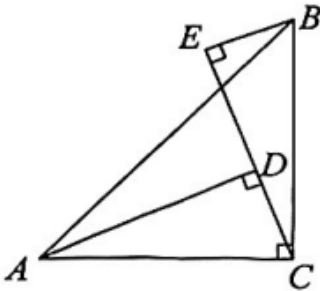
$\therefore EB=AD=3, DE=DB-EB=CE-DB=5-3=2$

2. (★★★★☆) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, $A(0, 3), C(1, 0)$, 则点 B 的坐标为_____.



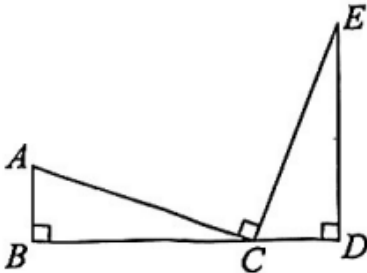
(第 2 题图)

1. (2018 山东临沂中考真题) 如图, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $AD \perp CE$, $BE \perp CE$, 垂足分别是点 D, E , $AD=3$, $BE=1$, 则 DE 的长是().

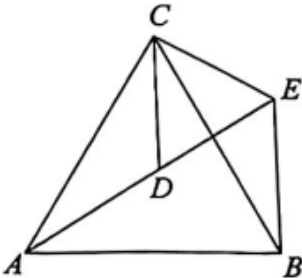


- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

2. (2020 四川南充中考真题) 如图, 点 C 在线段 BD 上, 且 $AB \perp BD$, $DE \perp BD$, $AC \perp CE$, $BC=DE$. 求证: $AB=CD$.



1. (☆☆☆☆) 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一条直线上, 连接 BE . 若 $\angle CAE=25^\circ$, 则 $\angle EBC$ 的度数是().

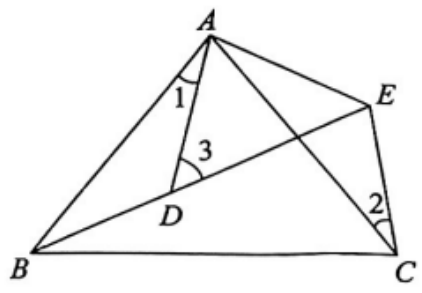


- A. 35° B. 30° C. 25° D. 20°

解: $\triangle CEB \cong$

$\triangle CDA$ 即可, SAS

2. (★★☆☆☆) 如图所示, B, D, E 在同一条直线上, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$, $\angle 1 = 25^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 3 = (\quad)$.

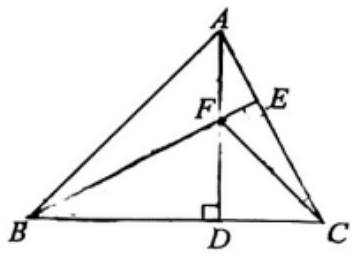


- A. 60° B. 55° C. 50° D. 无法计算

解: $\triangle BDA \cong \triangle ACE \therefore$

$\angle 3 = 55^\circ$

3. (★★★☆☆) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, AD, BE 分别为 BC, AC 边上的高, AD, BE 相交于点 F , 连接 CF , 则有下列结论: ① $BF = AC$; ② $\angle FCD = 45^\circ$; ③ 若 $BF = 2EC$, 则 $\triangle FDC$ 的周长等于 AB 的长. 其中正确的有 ($\quad$).



- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

解: ① $\because \angle ABC = 45^\circ \therefore \triangle ABD$ 为等腰直角三角形, $AB = DB$
 $\therefore \triangle DFB \cong \triangle FDB$ (AAS) 证毕 ② $\because FB = DC \angle ADC = 90^\circ \triangle FDC$ 为等腰直角三角形 $\therefore \angle FCD = 45^\circ$ 证毕
③ $BF = 2EC$, 所以 E 为中点, BE 就是垂直平分线. $\therefore AF = FC, AB = BC$ (垂直平分线的性质)
 $\therefore AB = BD + CD = AD + CD = AF + DF + CD = CF + DF + CD$
证毕

- D. 1

2. (2020 辽宁锦州中考真题) 已知 $\triangle AOB$ 和 $\triangle MON$ 都是等腰直角三角形 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}OA < OM = ON\right)$, $\angle AOB = \angle MON = 90^\circ$.

(1) 如图 1, 连接 AM, BN , 求证: $\triangle AOM \cong \triangle BON$.

(2) 若将 $\triangle MON$ 绕点 O 顺时针旋转.

① 如图 2, 当点 N 恰好在 AB 边上时, 求证: $BN^2 + AN^2 = 2ON^2$;

② 当点 A, M, N 在同一条直线上时, 若 $OB = 4, ON = 3$, 请直接写出线段 BN 的长.

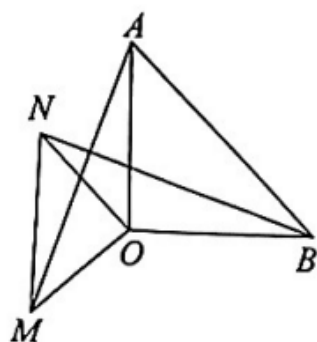


图 1

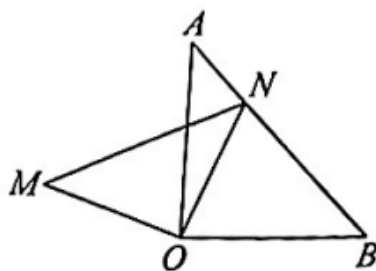


图 2



备用图

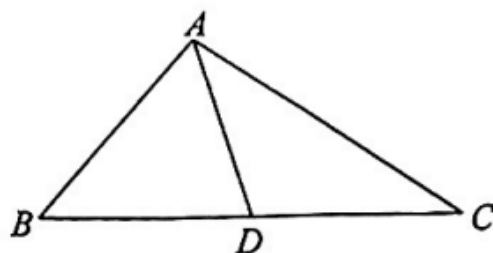
SAS可以证明 (1)

连接 $A-M$, 根据结论(1), 依然有 $\triangle AMO \cong \triangle NOB$

$\therefore \angle OAB = 45^\circ \angle MAO = \angle OBA = 45^\circ \therefore \angle MAN = 90^\circ$

$MN = BN \quad MN^2 = AB^2 = 2ON^2$ 证毕

1. (★★★★☆) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=7$, 则中线长度的取值范围是().



A. $1 < AD < 6$

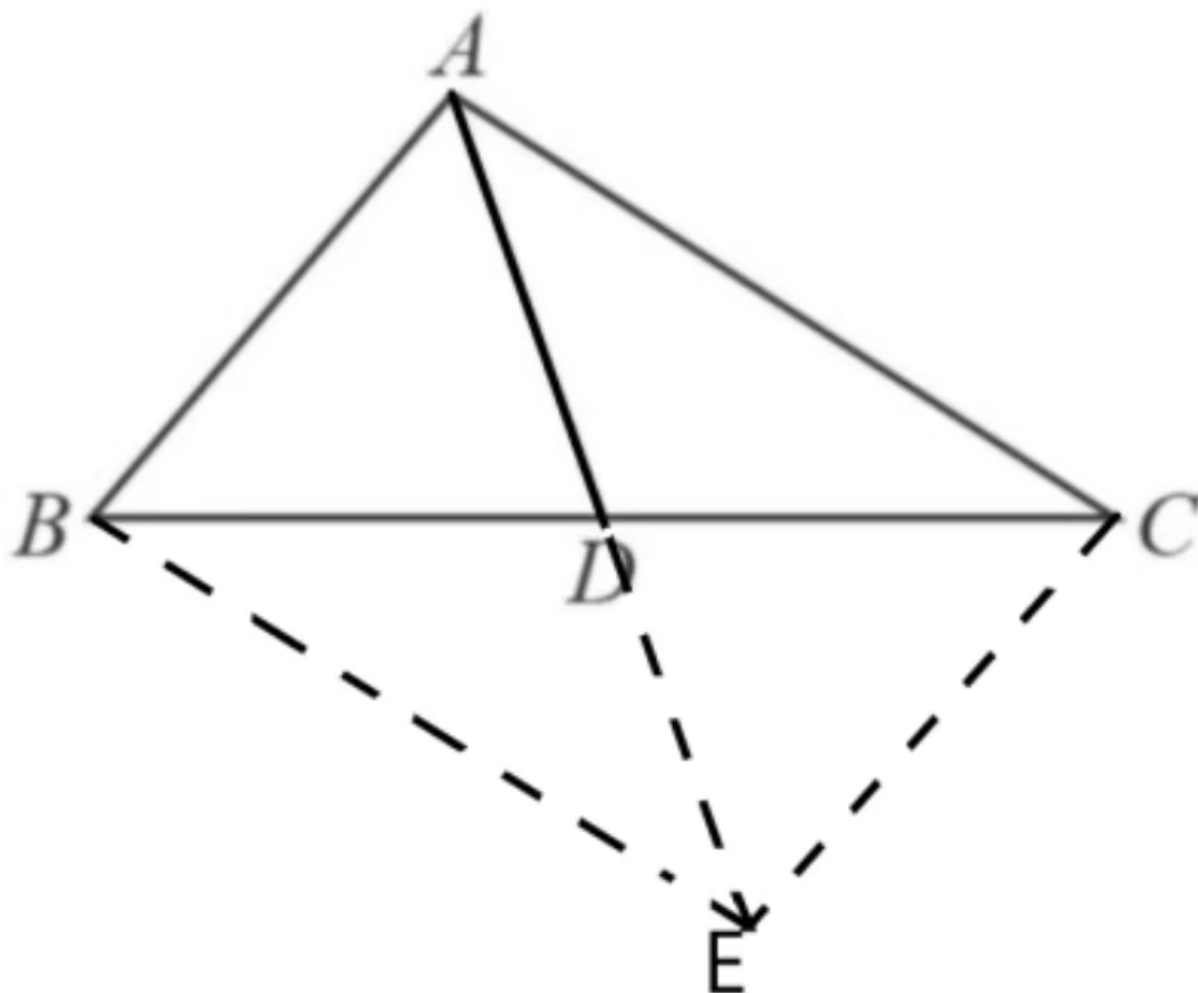
B. $2 < AD < 12$

C. $5 < AD < 7$

D. 无法确定

先导知识 #### [学习平行四边形判定要学好，这五种方法要掌握牢](#)

解:

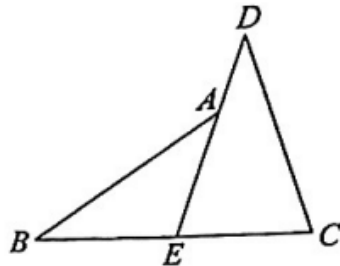


延长 AD , 截取 $DE = AD$ 则 D 为 AE, BC 的中点, 平行四边形判定办法, 知道 $ABCE$ 为平行四边形。

$AE < AB + BE = AB + AC = 7 + 5 = 12$, 所以 $AD < 6$ 同时, $AE > AC - CE = 7 - 5 = 2$, 所以 $AD > 1$ 选 A

2. (★★★☆☆) 阅读下面的题目及分析过程, 并按要求进行证明.

已知: 如图, E 是 BC 的中点, 点 A 在 DE 上, 且 $\angle BAE \cong \angle CDE$.



求证: $AB = CD$.

分析: 证明两条线段相等, 常用的一般方法是应用全等三角形或等腰三角形的判定和性质. 观察本题中要证明的两条线段, 它们不在同一个三角形中, 且它们分别所在的两个三角形也不全等. 因此, 要证 $AB = CD$, 必须添加适当的辅助线, 构造全等三角形或等腰三角形. 现给出如下三种添加辅助线的方法, 请任意选择其中一种, 对原题进行证明.

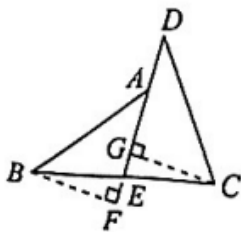


图 1

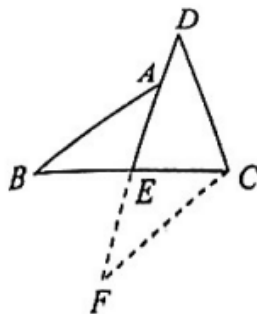


图 2

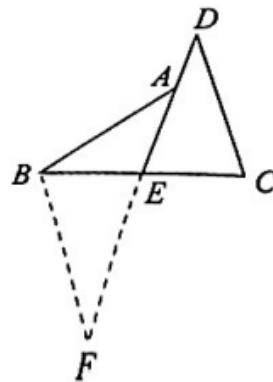


图 3

三个都需要仔细思考, 并由教师进行点拨

1. (2020 山东德州中考真题)

问题探究：

小红遇到这样一个问题：如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB=6, AC=4, AD$ 是中线, 求 AD 的取值范围. 她的做法是：延长 AD 到 E , 使 $DE=AD$, 连接 BE , 证明 $\triangle BED \cong \triangle CAD$, 经过推理和计算使问题得到解决.

请回答下列各题.

(1) 小红证明 $\triangle BED \cong \triangle CAD$ 的判定理由是_____.

(2) AD 的取值范围是_____.

方法运用：

(3) 如图 2, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 在 AD 上取一点 F , 连接 BF 并延长交 AC 于点 E , 使 $AE=EF$, 求证: $BF=AC$.

(4) 如图 3, 在矩形 $ABCD$ 中, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, 在 BD 上取一点 F , 以 BF 为斜边作 $Rt\triangle BEF$, 且 $\frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$, 点 G 是 DF 的中点, 连接 EG, CG , 求证: $EG=CG$.

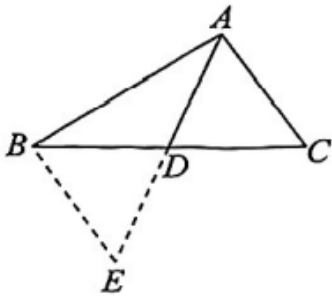


图 1

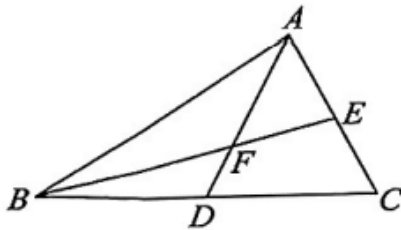


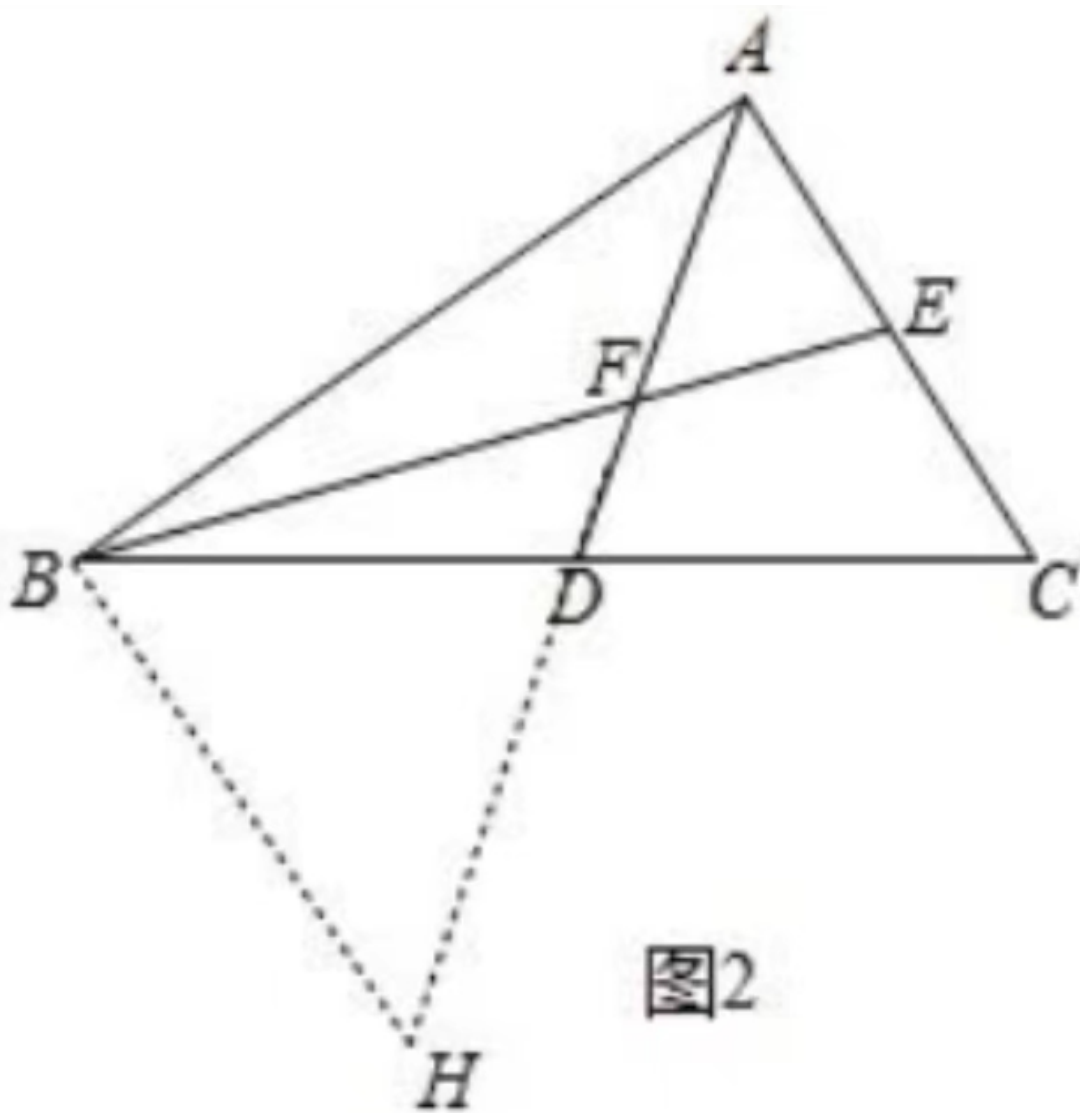
图 2

答: (1) SAS (2) $AB - AC < AE < AB + AC \Rightarrow 2 < AE < 10 \Rightarrow 1 < AD < 5$

(3)

- BF 与 AC 不在一个三角形中, 不好直接证明, 需要引辅助线。
- 一般中线的题, 都是把中线延长一倍, 然后再来思考解决办法。

画出下图：



$\triangle BDH \cong \triangle ADC \text{ SAS}$

如此，成功的把AC转化为BH,而BH与BF在同一个三角形中，就是证明 $\triangle BFH$ 是等腰三角形即可，问题得到转化。

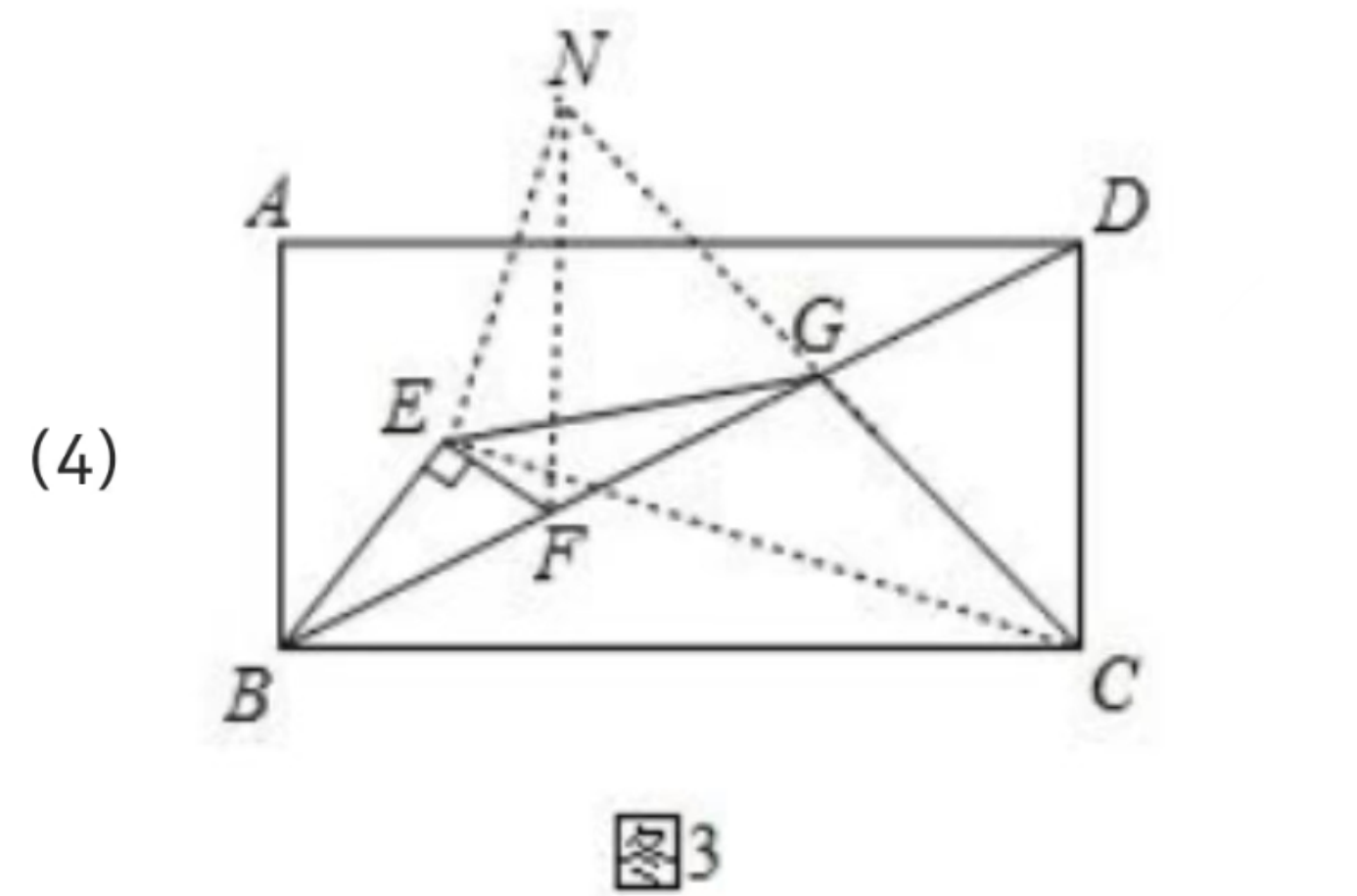
$\because \triangle BHD = \triangle ADC$ 平行四边判定办法,内错角相等 在, 而 $\triangle BFH = \triangle AFE$,而 $AE = EF$,所以
 $\triangle AFE = \triangle FAC = \triangle BHA$

结论: $\triangle BHD = \triangle BFH \Rightarrow BF = BH = AC$

【前导知识】 **直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半**

相似三角形

(4)如图 3,在矩形 $ABCD$ 中, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$,在 BD 上取一点 F ,以 BF 为斜边作 $Rt\triangle BEF$,且 $\frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$,点 G 是 DF 的中点,连接 EG , CG ,求证: $EG = CG$.



- $\triangle BEF \sim \triangle ABD$
- 欲证明 $EG = GC$, 而 $GC = NG$, 根据直角三角形的中线定理可知, 如果我们能证明 $\triangle NEC$ 为直角三角形即可。

Q: 如何证明一个三角形是直角三角形呢? A: 通过勾股定理肯定可以, 这里用不上, 只能从角度方向去思考: 通过瞪眼大法得知:

如果真有这个 $\triangle NEC = 90^\circ$, 那么 $\angle NEF = \angle BEC$ (两个直角 + 一个共用的角)

我们现在知道: $EF : EB = 1 : 2$, $DC = NF : BC = 1 : 2 \therefore EF : EB = NF : BC$

因为 $\tan \alpha = 1/2$

$90^\circ - \angle 1 + \angle 2 + (90^\circ - \angle 1) = 180^\circ \therefore \angle 2 = 2 \times \angle 1$ 即两个成比例边的夹角: $\angle EBC = \angle EFN$

$\therefore \triangle BEC \sim \triangle FEN$, 都扣去 $\angle FEC$, 则证明了 $\angle CEN = 90^\circ$

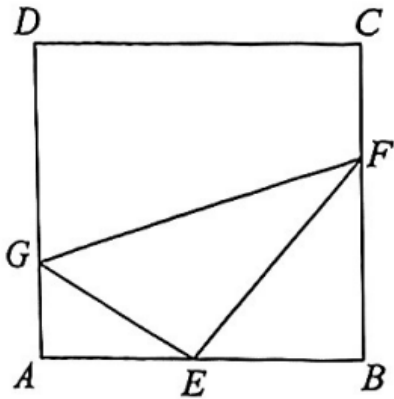
证毕。

【前导知识】

相似三角形

1. (★★☆☆☆) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 边的中点, G, F 分别为 AD, BC 边上的点, 若 $AG=1, BF=2, \angle GEF=90^\circ$, 则 GF 的长为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



(第 1 题图)

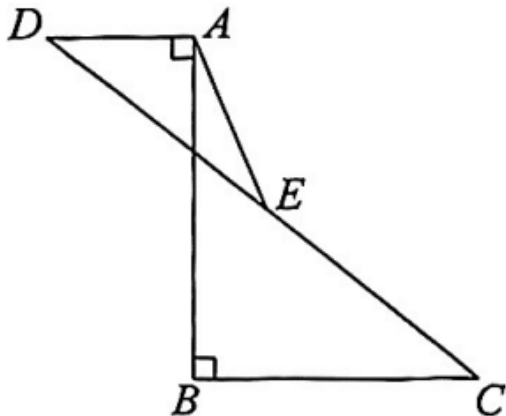
$$\triangle AEG \sim \triangle BFE$$

$$\text{比例: } \frac{AE}{BF} = \frac{AG}{BE} \text{ 同时: } AE = BE \therefore AE^2 = AG \cdot BF = 2 \therefore AE = \sqrt{2}$$

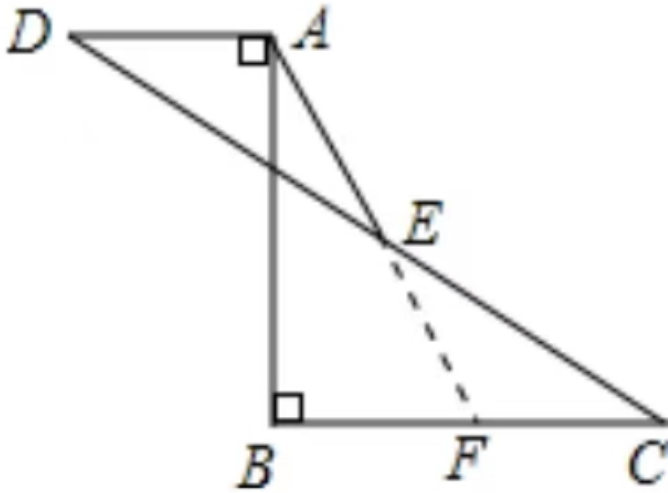
$$\therefore GF^2 = CE^2 + EF^2 = AG^2 + AE^2 + BE^2 + BF^2 = 1 + 2 + 2 + 4 = 9 \therefore GF = 3$$

2. (★★☆☆☆) 如图, 已知 $AB=12, AB \perp BC$ 于点 $B, AB \perp AD$ 于点 $A, AD=5, BC=10, E$ 是 CD 的中点, 则 AE 的长为().

A. 6 B. $\frac{13}{2}$ C. 5 D. $\frac{3}{2}\sqrt{41}$



(第 2 题图)



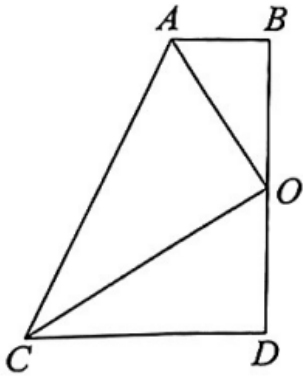
答:

$\triangle EFC \cong \triangle DAE$ $EF = AE$ $BF = BC - FC = BC - AD = 5$ $AF = \sqrt{AB^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$
 $\therefore AE = \frac{13}{2}$

3. (★★★☆☆) 如图, 在四边形 $ABDC$ 中, $\angle D = \angle B = 90^\circ$, O 为 BD 的中点, 且 $OA \perp OC$.

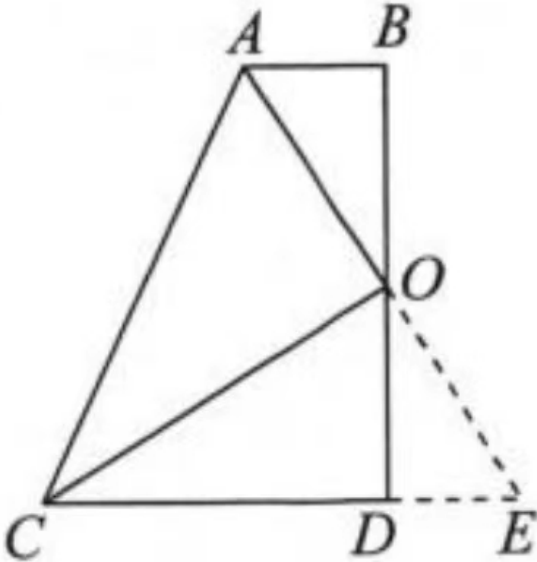
(1) 求证: CO 平分 $\angle ACD$.

(2) 求证: $AB + CD = AC$.



👉 解析 (1)如图,延长 AO 交 CD 的延长

线于点 E .

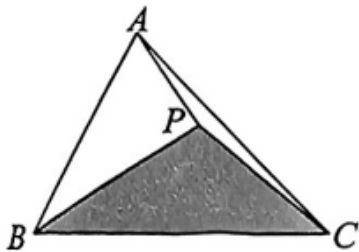


$\triangle ODE \cong \triangle AOB$

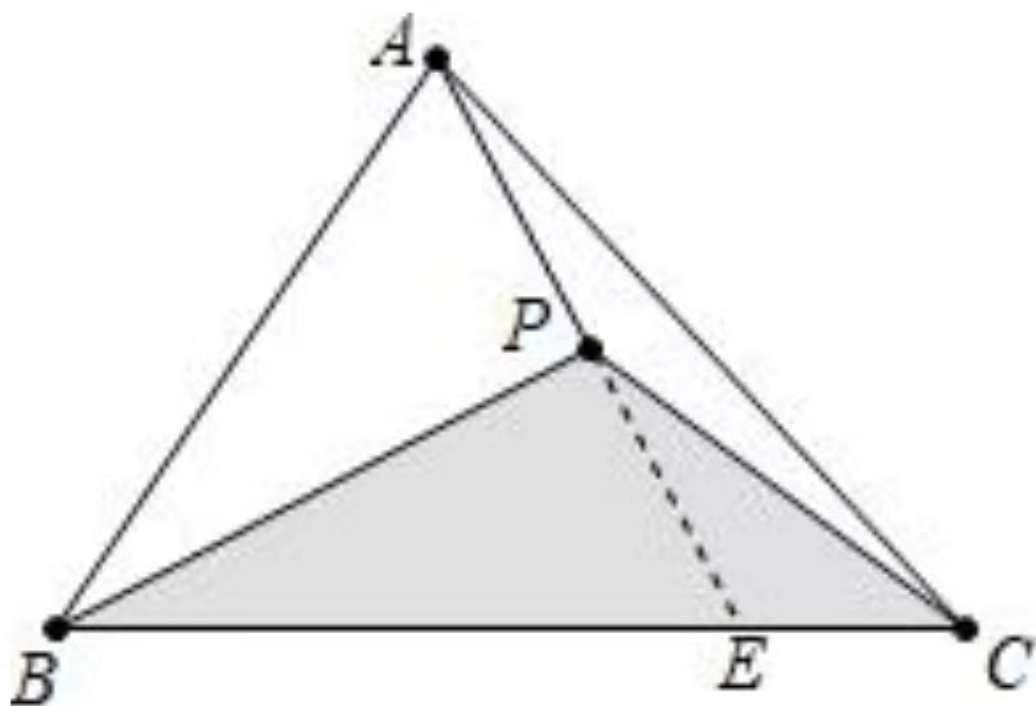
CO 是垂直平分线,证毕

1. (★★★★☆☆)如图, $\triangle ABC$ 的面积为 9 cm^2 , BP 平分 $\angle ABC$, $AP \perp BP$ 于点 P , 连接 PC , 则 $\triangle PBC$ 的面积为().

- A. 3 cm^2 B. 4 cm^2 C. 4.5 cm^2 D. 5 cm^2



(第 1 题图)



辅助线：

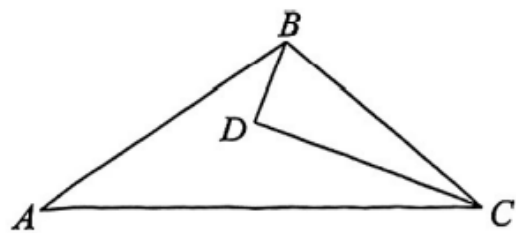
$\triangle APB \cong \triangle BPE$

$S_{\triangle PEC} = S_{\triangle APC}$ 底边长度一样，高相同。

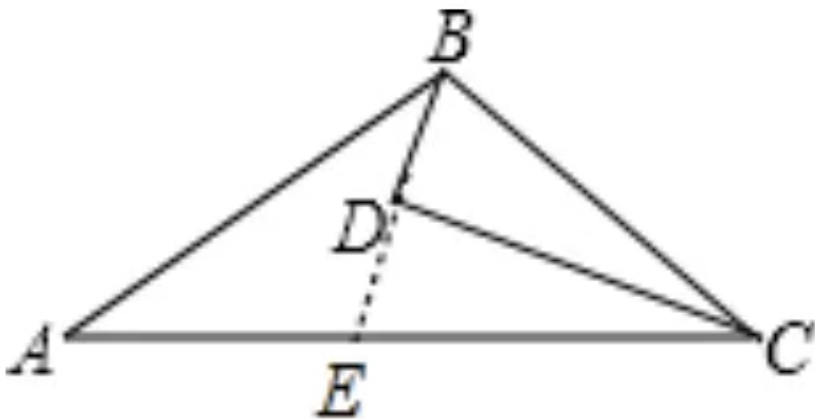
所以阴影面积是一半的面积。

2. (★★★☆☆) 如图， D 为 $\triangle ABC$ 内一点， CD 平分 $\angle ACB$ ， $BD \perp CD$ ， $\angle A = \angle ABD$ ，若 $BD = 1$ ， $BC = 3$ ，则 AC 的长为()。

- A. 5
- B. 4
- C. 3
- D. 2



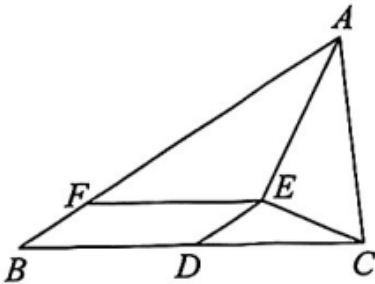
(第 2 题图)

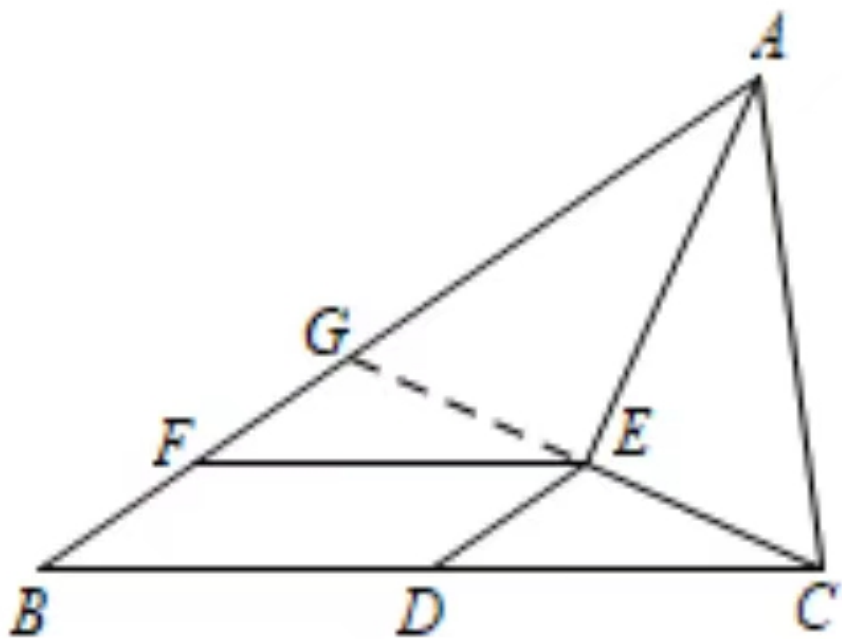


CD 平分 $\angle ACB$, $BD \perp CD$ $\triangle EBC$ 是等腰直角三角形 $AE = BE = BD + D1 + 1 = 2$ 选A

3. (★★★★☆) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 的中点, 点 E 在 $\triangle ABC$ 内, AE 平分 $\angle BAC$, $CE \perp AE$, 点 F 在 AB 上, 且 $BF = DE$.

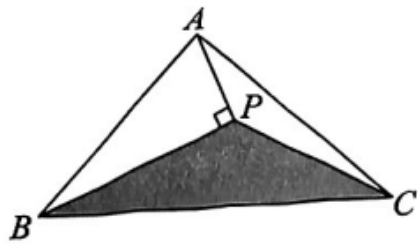
- (1) 求证: 四边形 $BDEF$ 是平行四边形.
- (2) 线段 AB, BF, AC 之间具有怎样的数量关系? 证明你所得到的结论.



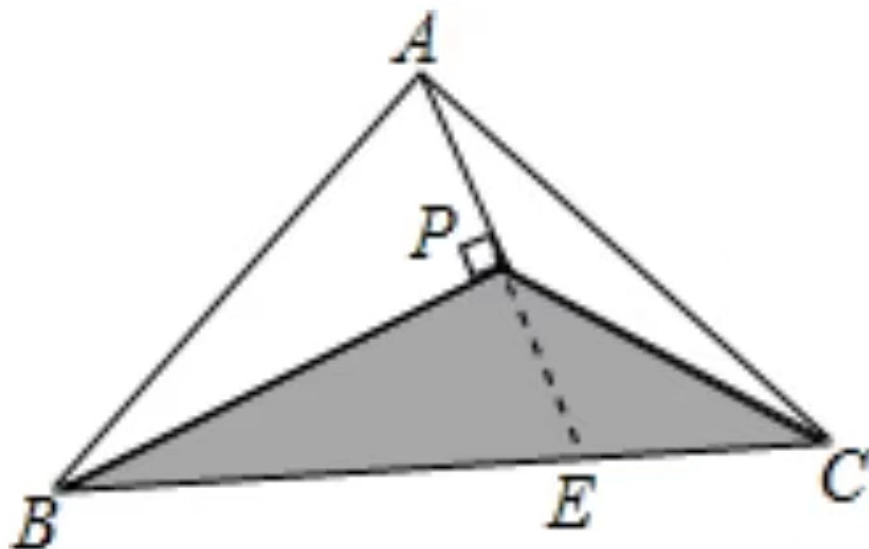


$\triangle AEG \cong \triangle AEC$ ED 为 $\triangle GCB$ 中位线 $BF = (AB - AC)/2$

1. (2018 福建福州中考模拟) 如图所示, $\triangle ABC$ 的面积为 10 cm^2 , BP 平分 $\angle ABC$, $AP \perp BP$, 垂足为 P , 连接 CP , 若三角形内有一点 M , 则点 M 落在 $\triangle BPC$ 内 (包括边界) 的概率为



延长 AP 交 BC 于 E ,



答：是 $1/2$ 的概率

前导知识

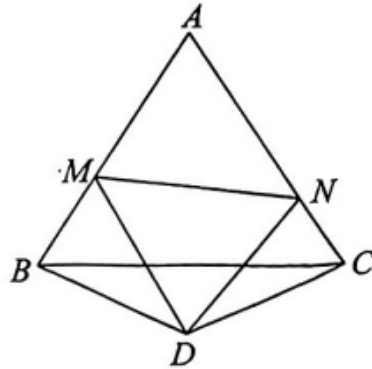
[中考压轴不再难！半角模型详解！](#)

[【中考热点】基本模型——半角模型 视频](#)

[中考数学——《半角模型》的“N条结论”](#)

[几何模型之半角模型](#)

如图, $\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$, 以 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 连接 MN , 则 $\triangle AMN$ 的周长是().

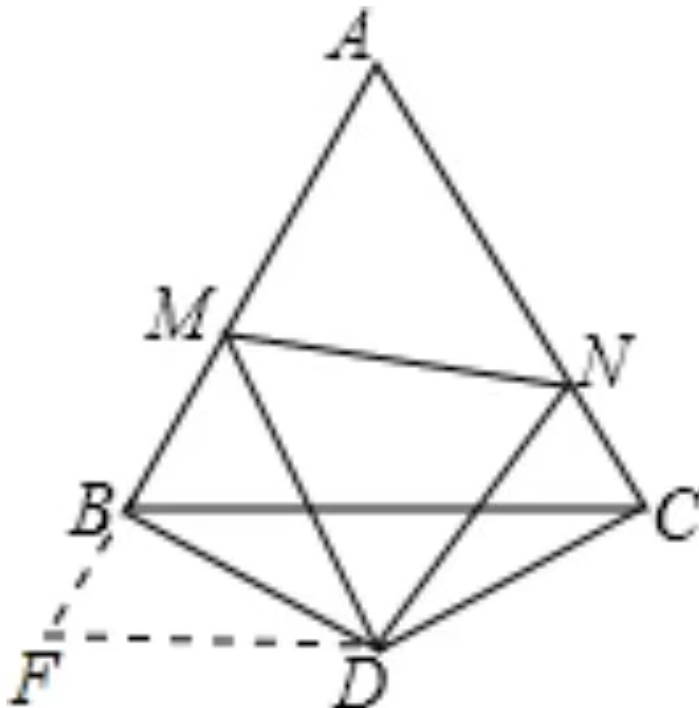


- A. a B. $2a$ C. $3a$ D. 不能确定

【答案】B

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形, 观察图形, 能发现图形为等腰三角形的半角模型, 根据半角模型结论可知, $\triangle AMN$ 的周长为 $\triangle ABC$ 边长的 2 倍, 即为 $2a$.
故选 B.

画图解析:



题解 因为 $\triangle AMN$ 的周长需要三长边 AM, MN, AN , 而分别计算出来并加在一起从题目中给出的条件看来并不现实, 所以需要一条边转化到另一条边上去, 这样就可以拿到两条直边, 看看能不能和题目给出的 AB, AC 建立起关系。

通过瞪眼大法得知, $AN = AC - CN$, 所以, 尝试将 CN 移动到 AB 上去, 一旦成功转化, 就好办了。

引辅助线：在AB延长线上截取 $BF = NC$ ，试图证明 $\triangle BDF \cong \triangle DNC$ ，很显然，通过ASA($BD = DC, NC = BF, \angle FBD = \angle DCN$)，全等三角形得证。有条件 $DF = DN$ 成立。

现在还拿不到结论，还需要继续瞪眼大法： $\angle BDM + \angle MDN + \angle NDC = 120^\circ$ 而其中 $\angle MDN = 60^\circ$
 $\therefore \angle BDM + \angle NDC = 60^\circ$ 而 $\angle NDC = \angle BDF$ ，所以 $\angle MDF = 60^\circ$ ① MD是公共边 ②

$$DF = DN \text{ ③}$$

$$\therefore \triangle MDF \cong \triangle MDN \text{ (SAS)}$$

$$\therefore MN = MB + BF$$

$$C_{\triangle AMN} = AM + MN + AN = AM + MB + BF + AN = AB + BF + AN = AB + AN + NC = AB + AC = 2a$$

(1)如图 1,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD, \angle B=\angle D=90^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点,且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 求证: $EF = BE + FD$.

(2)在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD, \angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点,且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, (1)中的结论是否仍然成立? (不需要说明理由)

(3)如图 2,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD, \angle B + \angle ADC = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 延长线上的点,且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, (1)中的结论是否仍然成立? 若成立,请证明;若不成立,请写出它们之间的数量关系,并证明.

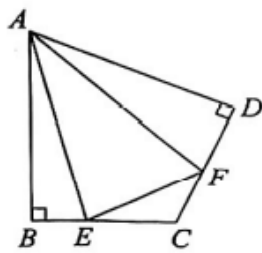


图 1

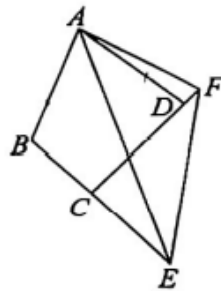


图 2

解答

(2) (1) 中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

26. 证明: (1) 如图 1, 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG . $\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ$, $AB = AD$, $\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$. $\therefore AG = AF$, $\angle 1 = \angle 2$. $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. $\therefore \angle GAE = \angle EAF$. 又 $\because AE = AE$, $\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF$. $\therefore EG = EF$. $\because EG = BE + BG$. $\therefore EF = BE + FD$.

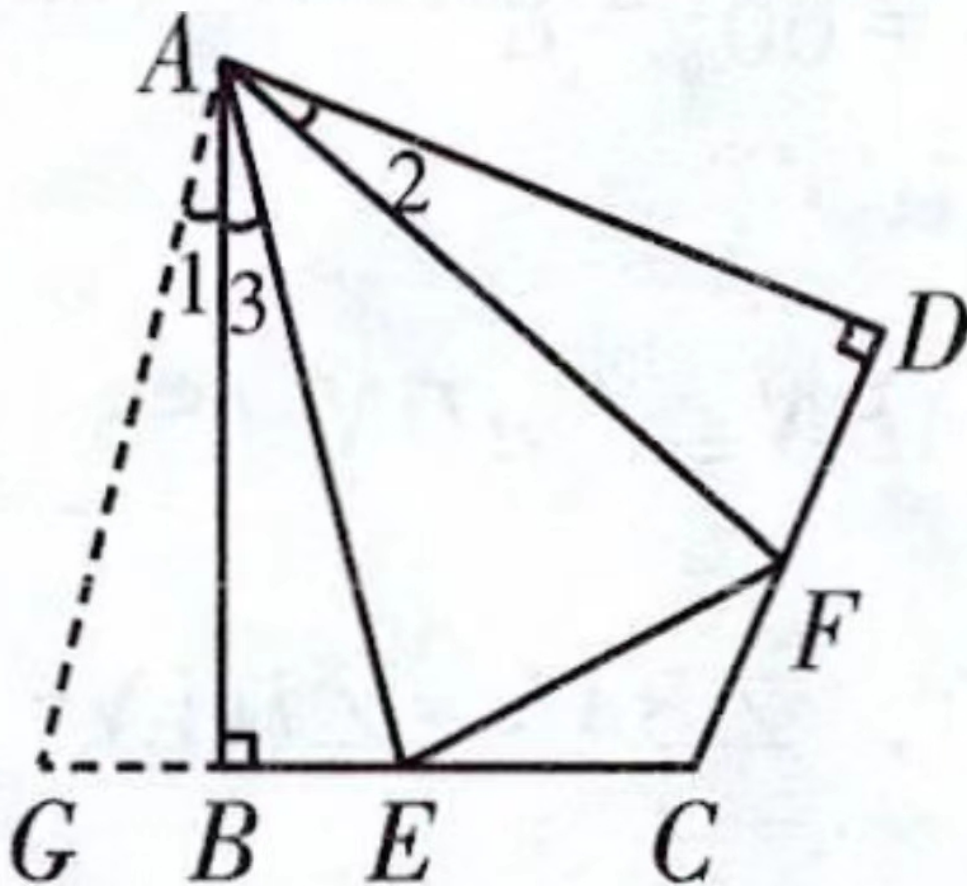
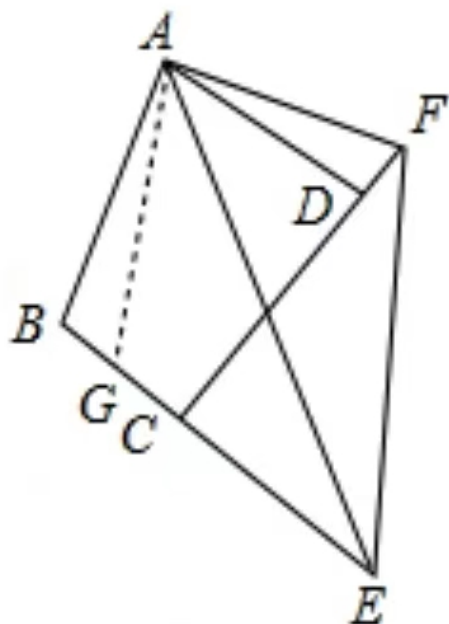


图 1

第二问也是成立的, 因为两角相加等于180, 也就是互补, 一样可以证明两个三角形全等。

如图③中，在 BE 上截取 BG ，使 $BG = DF$ ，连接 AG ．

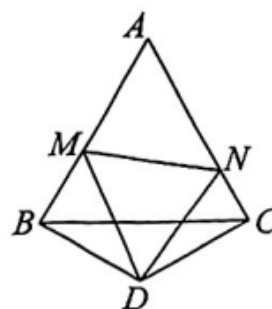


图③

$$\angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$$

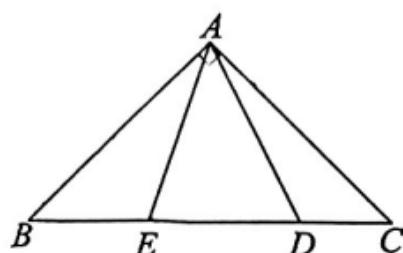
将 $\angle DAF$ 移动到 $\angle BAG$ 后, 这块多出来的小角就存在于原始角 $\angle BAD$ 中了, 扣除它后, 再扣除 $\angle EAD$, 则剩下的 $\angle GAE$ 就是 $\frac{1}{2}\angle BAD = \angle EAF \therefore \triangle AGE \cong \triangle EAF \therefore EG = EF \therefore EG = BE - BG \therefore EF = BE - FD$ 所以, 题目中说到的结论是错误的。

1. (★★☆☆☆) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$. 以 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 连接 MN , 则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____.



本题是例题，不再讲解

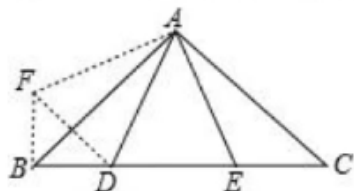
2. (★★★☆☆) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D, E 是斜边 BC 上两点, 且 $\angle DAE=45^\circ$. 若 $BE=4, CD=3$, 则 AB 的长为_____.



(第2题图)

解答

将 $\triangle AEC$ 顺时针方向旋转 90° 至 $\triangle AFB$,



$\because AB=AC, \angle BAC=90^\circ$,
 $\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$,
 根据旋转的性质可得 $\triangle AEC \cong \triangle AFB$,
 $\therefore \angle ABF=\angle ACD=45^\circ, \angle BAF=\angle CAE$,
 $AE=AF$,

$\therefore \angle FBE=45^\circ+45^\circ=90^\circ, BF=CE$,

$\therefore BD^2+BF^2=DF^2$,

$\because \angle DAE=45^\circ$,

$\therefore \angle BAD+\angle CAE=45^\circ$,

$\therefore \angle BAD+\angle BAF=45^\circ$,

$\therefore \angle DAE=\angle DAF$,

又 $\because AD=AD$,

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DAF$ (SAS),

$\therefore DE=DF$,

$\therefore BD^2+BF^2=DE^2$,

$\because BD=3, CE=4$,

$\therefore DE=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

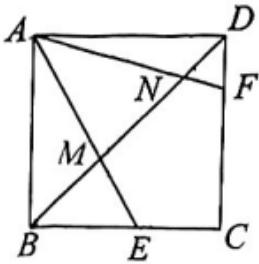
$\therefore BC=BD+DE+CE=3+5+4=12$,

$\therefore AB=AC=12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}=36$.

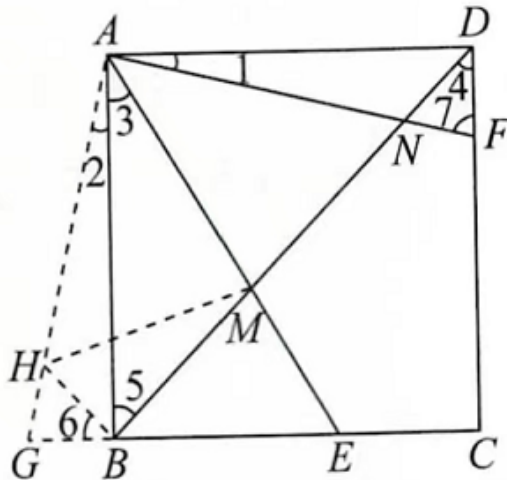
故答案为: 36.

3. (★★★★☆) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $\angle EAF = 45^\circ$, 连接对角线 BD 交 AE 于点 M , 交 AF 于点 N . 若 $DN = 1, BM = 2$, 那么 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$.



(第 3 题图)

 **解析** 如图, 延长 CB 到点 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG , 在 AG 上截取 $AH = AN$, 连接 MH, BH .



思路

通过两次三角形全等, 可知 $\angle GAE = \angle EAF, FN = GH \Rightarrow \triangle DFN \cong \triangle BGH$

$$BM^2 + DN^2 = BM^2 + BH^2 = MH^2 = MN^2 \because DN = 1, BM = 2 \therefore 2^2 + 1^2 = MN^2 \therefore MN = \sqrt{5}$$

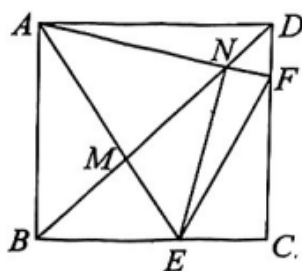
直击中考

1. (2020 山东济南中考模拟) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, AE, AF 分别交 BD 于点 M, N , 连接 EN, EF . 有以下结论:

① $AN = EN$; ② 当 $AE = AF$ 时, $\frac{BE}{EC} = 2 - \sqrt{2}$; ③ $BE + DF = EF$;

④ 存在点 E, F , 使得 $NF > DF$.

其中正确的个数是().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

1、证明 $AN = EN$

$\because \angle AMN = \angle BME, \angle EAN = 45^\circ = \angle ABM \therefore \triangle AMN \sim \triangle BME \therefore \frac{AM}{BM} = \frac{MN}{ME}$ 同时, $\angle AMB = \angle BMN$
 $\therefore \triangle AMB \sim \triangle NME \therefore \angle AEN = \angle BAE = 45^\circ$ 同时因为 $\angle EAN = 45^\circ \therefore \angle ENA = 90^\circ$ 也就是 $\triangle ANE$ 为等腰直角三角形, 所以 $AN = NE$, ① ✓

2、证明 当 $AE = AF$ 时, $\frac{BE}{EC} = 2 - \sqrt{2}$

如图2，连接 AC ，交 EF 于 O

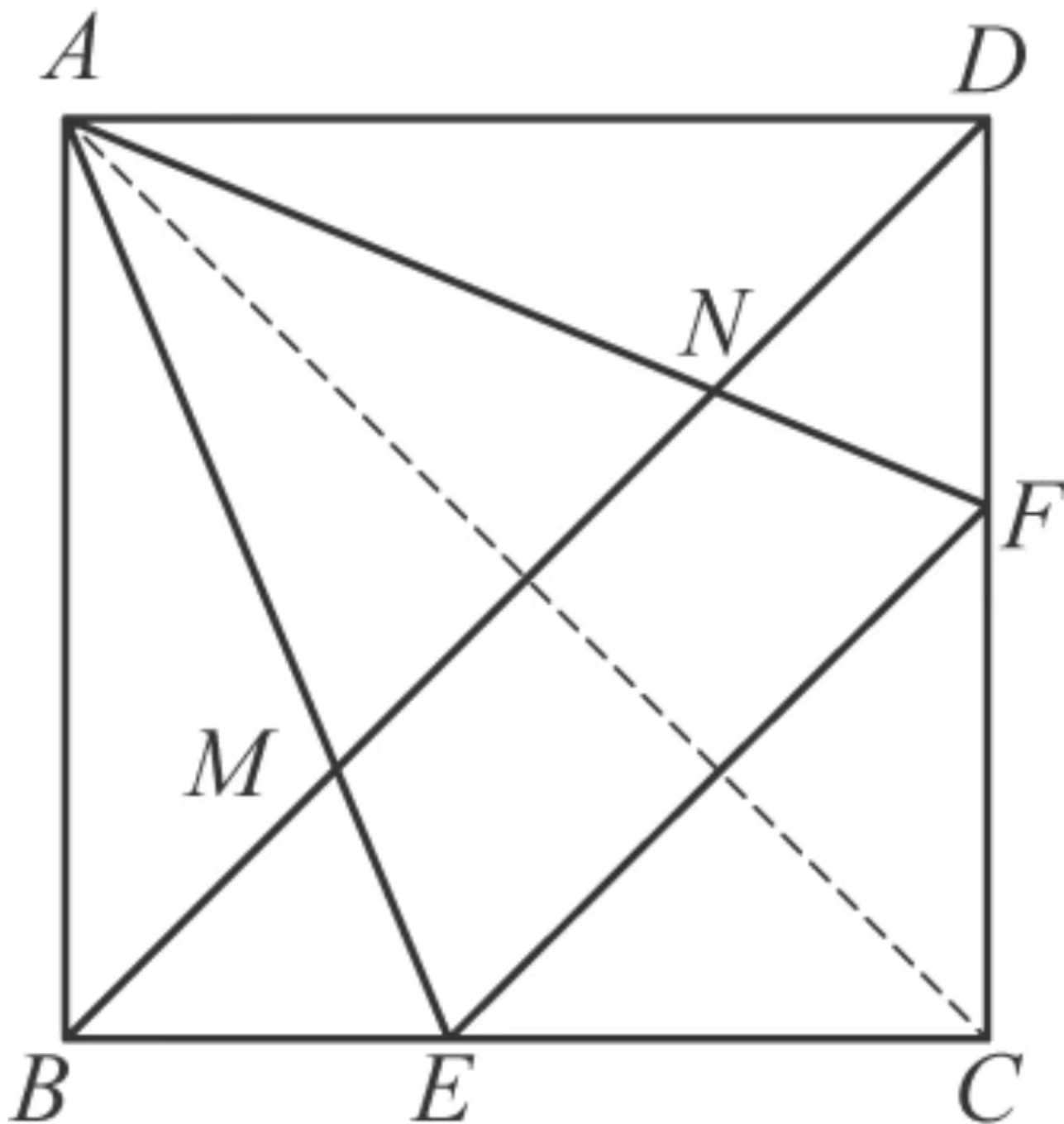


图2

设正方形边长为1, 设 $CE = x \Rightarrow OC = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

$\triangle AOE \cong \triangle ABE \Rightarrow AO = AB = 1 \Rightarrow CO = \sqrt{2} - 1$

$\therefore 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}$

$\frac{BE}{EC} = \frac{1 - (2 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 故②✗

3、证明 $BE + DF = EF$

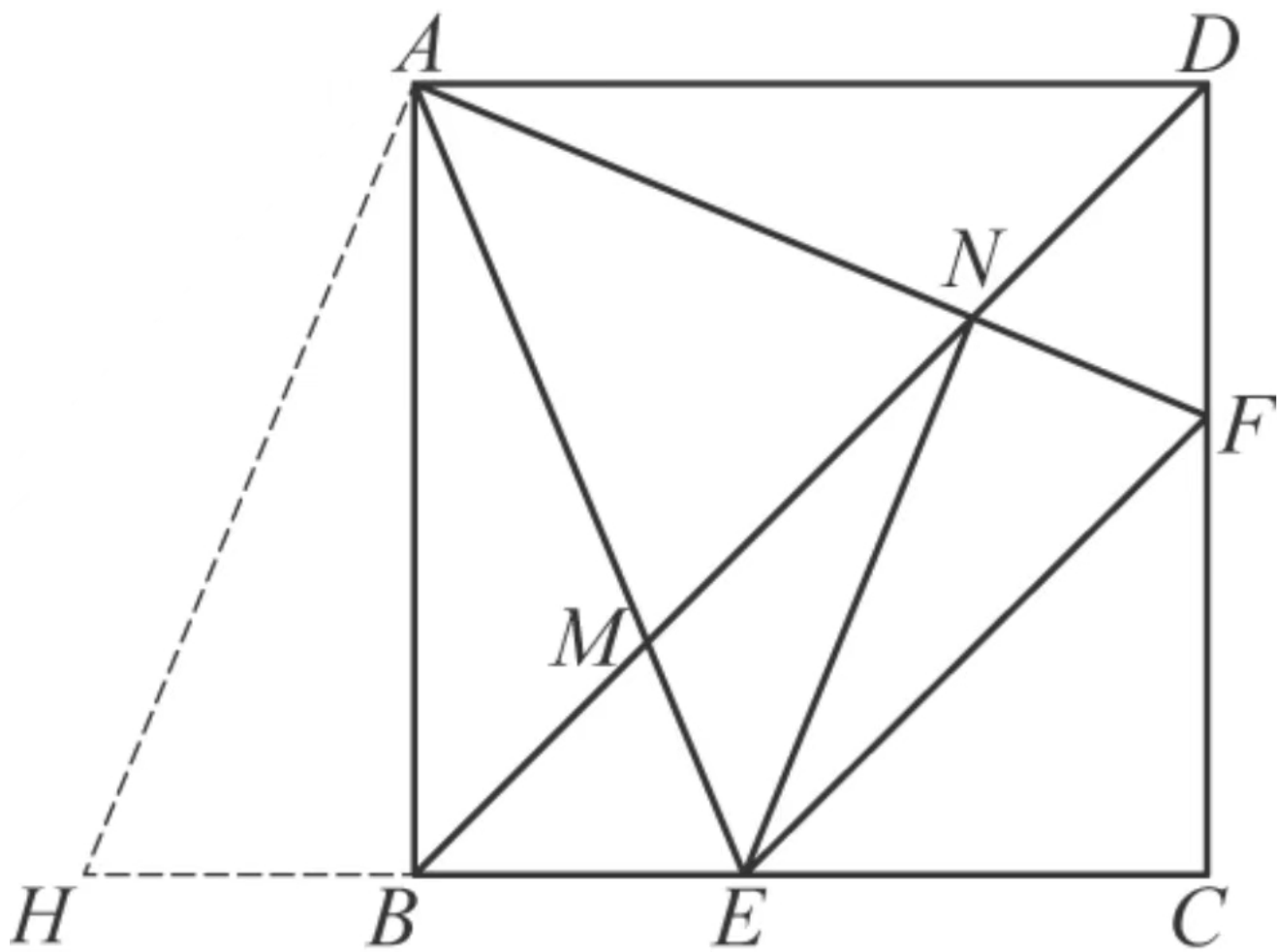


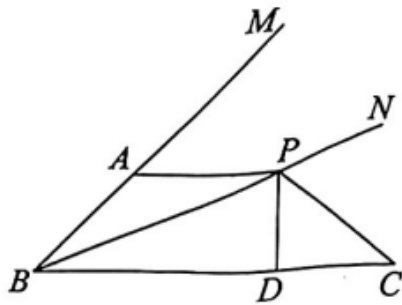
图3

半角模型常见办法，就不再赘述了。③ ✓

4、证明 存在点 E, F ,使得 $NF > DF$

这是一个大边对大角，小边对小角的知识点考查， $\angle NDF = 45^\circ, \angle FND = \angle NDA + \angle NAD = 45^\circ + \angle NAD$
 $\therefore \angle DNF > \angle NDF, \Rightarrow DF > NF$ ④ ✕

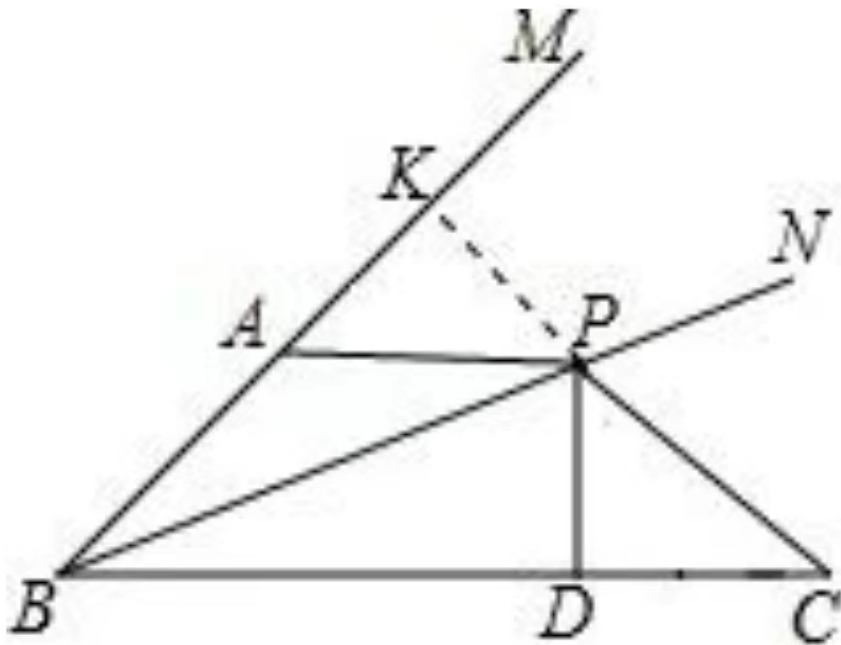
1. (★★★★☆) 如图, BN 为 $\angle MBC$ 的平分线, P 为 BN 上一点, 且 $PD \perp BC$ 于点 D , $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$, 给出下列结论: ① $\angle MAP = \angle BCP$; ② $PA = PC$; ③ $AB + BC = 2BD$; ④ 四边形 $BAPC$ 的面积是 $\triangle PBD$ 面积的 2 倍. 其中正确结论的个数为().



- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【解析】

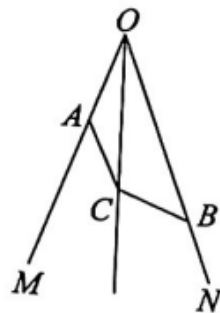
过点 P 作 $PK \perp AB$, 垂足为点 K 。



证明 $\triangle BPK \cong \triangle BPD$ ① $\angle PKA = \angle PDC = 90^\circ$ ② $KP = PD$ ③ $\therefore \triangle APK \cong \triangle PDC$ 所以第一问、第二问、第三问(稍一修改即可)都正确。

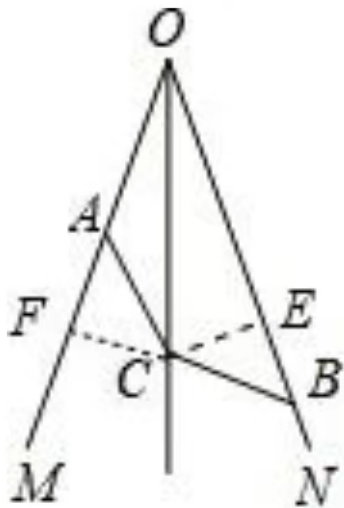
第四问: 将 $\triangle PDC$ 旋转到 $\triangle PKA$, $S_{PCBA} = S_{\triangle BKP} + S_{\triangle BPD}$, 所以也正确。

2. (★★★★☆) 如图, OC 平分 $\angle MON$, A, B 分别为 OM, ON 上的点, 且 $BO > AO, AC = BC$, 求证: $\angle OAC + \angle OBC = 180^\circ$.



解答

如图，作 $CE \perp ON$ 于 E ， $CF \perp OM$ 于 F 。



$\because OC$ 平分 $\angle MON$ ， $CE \perp ON$ 于 E ，
 $CF \perp OM$ 于 F 。

$\therefore CE = CF$ ，

$\because AC = BC$ ， $\angle CEB = \angle CFA = 90^\circ$ ，

$\therefore Rt\triangle CFA \cong Rt\triangle CEB (HL)$ ，

$\therefore \angle ACF = \angle ECB$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle ECF$ ，

$\because \angle ECF + \angle MON = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ$
 $= 180^\circ$

，

$\therefore \angle ACB + \angle AOB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle OAC + \angle OBC = 180^\circ$ 。