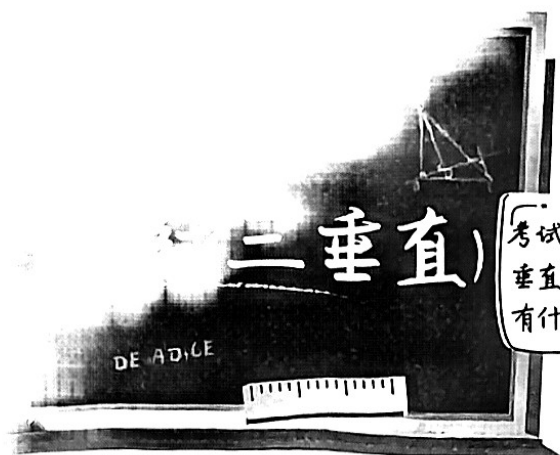




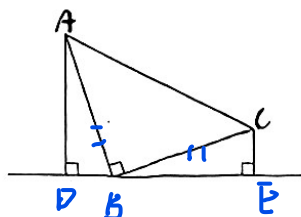
没错，像这样三条垂直线的，很多形成了一线三垂直模型，这里有很多诀窍，我们一起来看看！

考试时经常看到多条垂直线，老师，是否有什么解题大招呢？



模型讲解

【结论】如图所示， $AB \perp BC$ ， $AB=BC$ ， $AD \perp DE$ ， $CE \perp DE$ ，则 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ， $DE=AD+CE$ 。



【证明】 $\because AB \perp BC, \therefore \angle ABC = 90^\circ, \therefore \angle ABD + \angle EBC = 90^\circ$ 。

$\because AD \perp DE, CE \perp DE, \therefore \angle ADB = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle DAB = 90^\circ, \therefore \angle DAB = \angle EBC$ 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle BEC, \\ \angle DAB = \angle EBC, \\ AB = BC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE (AAS), \therefore AD = BE, DB = CE$ ，

$\therefore DE = BE + DB = AD + CE$ 。



名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看

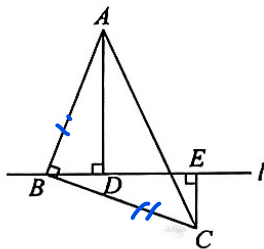


模型巧记

两条手臂之间的距离 =
长手 + 短手，即 $DE = AD + CE$ 。

其他形状的K型(一线三等角)模型

【结论】如图所示， $AB \perp BC$ ， $AB=BC$ ， $AD \perp DE$ ， $CE \perp DE$ ，则 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ， $DE=AD-CE$ 。



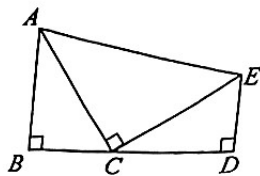
模型巧记

两条手臂之间的距离 =
长手 - 短手，即 $DE = AD - CE$ 。

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图所示, $AC=CE$, $\angle ACE=90^\circ$, $AB \perp BD$, $ED \perp BD$, $AB=5$
 $DE=3$ cm, 则 $BD=(\quad)$.



- A. 6 cm B. 8 cm C. 10 cm D. 4 cm

【答案】B

【解析】易知本题为 K 型(一线三垂直)模型.

根据 K 型(一线三垂直)模型的结论, 可知

两条手臂之间的距离 = 长手 + 短手,

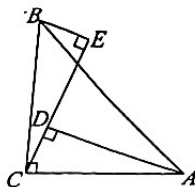
即 $BD=AB+DE$,

$\therefore BD=5+3=8(\text{cm})$.

故选 B.

典例2 ☆☆☆☆☆

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $BE \perp CE$ 于点 E, $AD \perp CE$ 于点 D. 若 $DE=6$ cm, $AD=9$ cm, 则 BE 的长是 $(\quad)$.



- A. 6 cm B. 1.5 cm C. 3 cm D. 4.5 cm

【答案】C

【解析】易知本题为 K 型(一线三垂直)模型.

根据 K 型(一线三垂直)模型的结论, 可知

两条手臂之间的距离 = 长手 - 短手,

即 $DE=AD-BE$,

$\therefore BE=AD-DE=9-6=3(\text{cm})$.

故选 C.

模型巧记

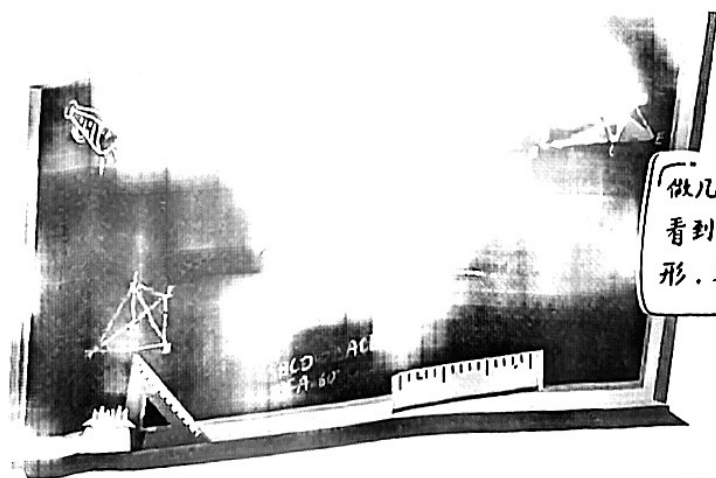
三直角顶点共直线, 多个垂直先导角, 有边等, 条件已够证全等.

忘记了模型结论怎么办?

忘记了没关系, 找出全等的两个三角形, 一样可以解决问题.

名师点拨

看到 K 型(一线三垂直)模型, 首先要确定属于模型中的哪一种, 再根据模型确定使用“加”还是“减”的结论.



这个模型很可爱呢，它有好变形，但无论何种变形，它都是很友好的，被称为手拉手模型，我们一起来看看吧！

做几何题时，经常看到这样复杂的图形，真心不会啊！



模型讲解



名师有话说

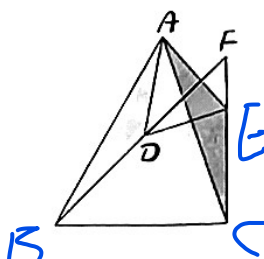
更多精彩内容
请扫码观看



【结论】如图所示， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle BAC=\angle DAE$ ，则

(1) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;

(2) BD 和 CE 的夹角 $\angle BFE = \angle BAC = \angle DAE$.



【证明】(1) $\because \angle BAC = \angle DAE$,

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}).$$

(2) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，可看成 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转到 $\triangle ACE$ 的位置，

BA 和 CA 的夹角为 $\angle BAC$ ， AD 和 AE 的夹角为 $\angle DAE$ ， BD 和 CE 的夹角为 $\angle BFE$ ，

根据旋转的性质容易得到对应边的夹角等于旋转角，故 $\angle BFE = \angle BAC = \angle DAE$.



模型巧记

① 等角共点推等角；

② 相同图形在一起，要把边角边想起。



名师点拨

已知
两边

找夹角 (SAS)

找第三边 (SSS)

找直角 (HL)

典例2 ☆☆☆☆☆

已知两个三角形
两边对应相等，
怎么证全等？

我首选
SAS.

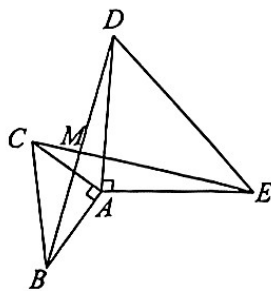


我选SLS(手拉手).



遇到手拉手模型时，根据已知条件找到两个三角形对应相等的边和夹角，选取对应的判定方法，也可以根据模型结论找到全等三角形。

如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形， CE 与 BD 相交于点 M ，则 BD 与 CE 的数量关系为()。



- A. $BD = \frac{1}{2}CE$ B. $BD = \frac{2}{3}CE$ C. $BD = CE$ D. $BD = \frac{3}{2}CE$

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 共点，

$\therefore$ 形成了手拉手模型。

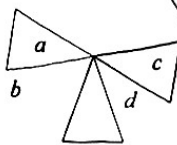
根据模型结论可知 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ 。

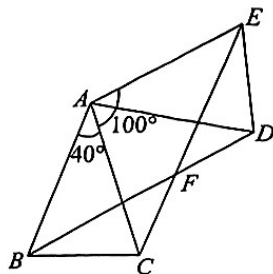
故选 C。

典例3 ☆☆☆☆☆

等腰三角形无论旋转到哪边，对应角的连线都相等。所以有 $a=b$ ， $c=d$ 。



如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=40^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 100° 得到 $\triangle ADE$ ，连接 BD ， CE 交于点 F ，则 BD 与 CE 的数量关系为()。



- A. $BD = \frac{1}{2}CE$ B. $BD = \frac{2}{3}CE$ C. $BD = CE$ D. $BD = \frac{3}{2}CE$

【答案】C

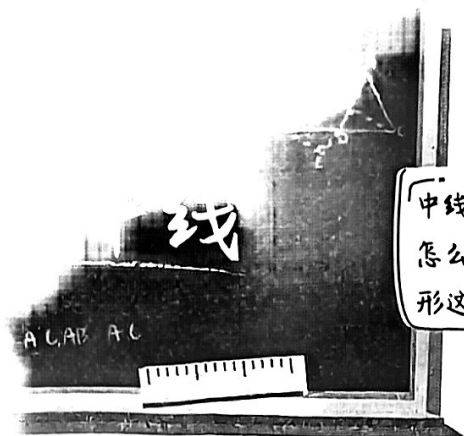
【解析】 $\because \triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 100° 得到 $\triangle ADE$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 形成手拉手模型。

根据模型结论可知，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ 。故选 C。



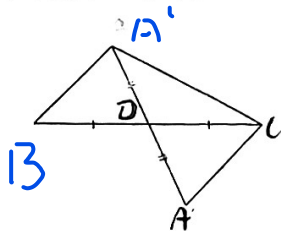
遇到中线的问题，我们可以构造倍长中线来解决，倍长中线让题目 so easy.

中线长度的范围该怎么算啊？看着图形这么简单。



模型讲解

【结论】如图所示， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，延长 AD 至点 A' ，使得 $DA' = AD$ ，连接 CA' ，则 $AB = A'C$ ， $AB \parallel A'C$ 。



【证明】在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'CD$ 中，

$$\begin{cases} DB = CD, \\ \angle BDA = \angle CDA', \\ AD = A'D, \end{cases}$$

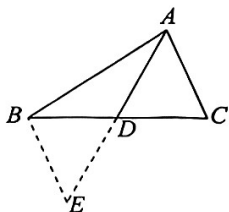
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'CD$ (SAS).

$\therefore AB = A'C, \angle ABD = \angle A'CD,$

$\therefore AB \parallel A'C.$

模型拓展

【模型 1】(直接倍长) $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，延长 AD 到点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE 。



【模型 2】(间接倍长) $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线。

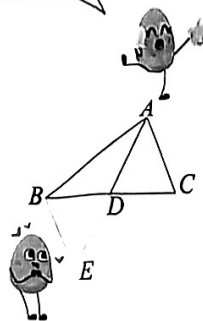


名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看

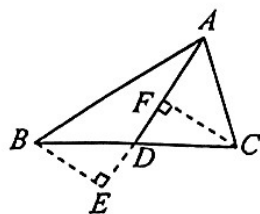


速度一样，我们能同时到达 D 点。



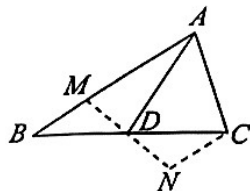


有中点,可倍长,倍长完了S字现.



(1)如图,作 $CF \perp AD$ 于点 F ,作 $BE \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E .

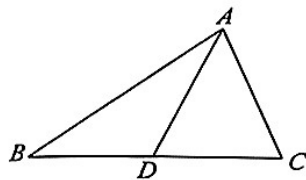
(2)如图,点 M (不与 A, B 重合) 是 AB 上一点,连接 MD 并延长至点 N ,使 $DN = MD$,连接 CN .



典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图, $\triangle ABC$ 中,若 $AB=8, AC=6$,则 BC 边上的中线 AD 长度的取值范围为().



A. $6 < AD < 8$

B. $6 \leq AD \leq 8$

C. $1 < AD < 7$

D. $1 \leq AD \leq 7$

【答案】C

【解析】如图,延长 AD 至点 E ,使 $ED=AD$,连接 BE ,

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore$ 由倍长中线模型可知 $BE=AC$.

$\because AB-BE < AE < AB+BE$,

$\therefore AB-AC < AE < AB+AC$.

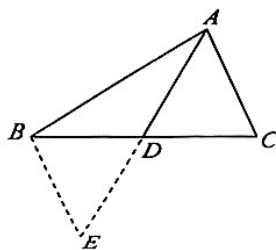
$\because AB=8, AC=6$,

$\therefore 8-6 < AE < 8+6, \therefore 2 < AE < 14$.

$\because AD=ED, \therefore AE=AD+ED=AD+AD=2AD$,

即 $2 < 2AD < 14, \therefore 1 < AD < 7$.

故选 C.

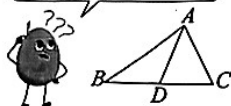


三角形三边的大小关系:

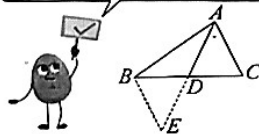
1 三角形两边之和大于第三边;

2 三角形两边之差小于第三边.

怎么作倍长中线呢?

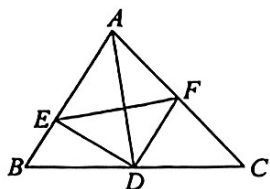


延长 AD , 以 D 点为圆心, 以 AD 为半径作弧, 交 AD 的延长线于点 E , 连接 BE , 则 AE 即为倍长中线.



典例2 ☆☆☆☆☆

如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, E, F 分别在边 AB, AC 上 (E, F 不与端点重合), 且 $DE \perp DF$, 则 ().



- A. $BE + CF > EF$ B. $BE + CF = EF$
C. $BE + CF < EF$ D. $BE + CF$ 与 EF 的长短关系不确定

【答案】A

【解析】如图, 延长 ED 至点 G , 使 $DG = ED$, 连接 CG, FG .

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore$ 由倍长中线的拓展模型可得 $CG = BE$.

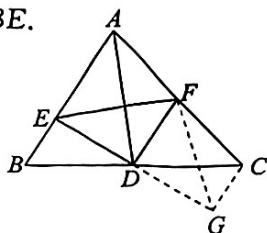
又 $\because DE \perp DF, DG = ED$,

$\therefore FD$ 是 EG 的垂直平分线,

$\therefore FG = EF$.

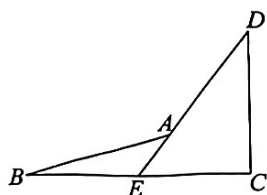
$\because GC + CF > FG, \therefore BE + CF > EF$.

故选 A.



典例3 ☆☆☆☆☆

如图所示, E 是 BC 的中点, $\angle BAE = \angle CDE$. 若 $AB = 6$, 则 $CD = ()$.



- A. 6 B. 3 C. 12 D. 无法确定

【答案】A

【解析】如图, 延长 DE 至点 G , 使得

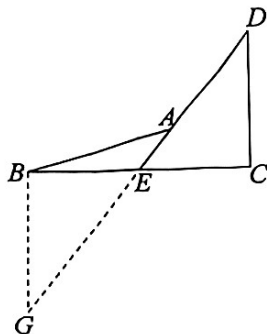
$DE = EG$, 连接 BG .

由模型知 $\triangle GBE \cong \triangle DCE$,

所以 $\angle BAE = \angle CDE = \angle BGE$,

所以 $BG = AB = DC = 6$.

故选 A.



名师点拨

倍长中线的思路:

已知中线

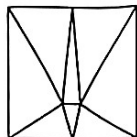
作中线倍长线

证全等

找大小关系

趣味题目

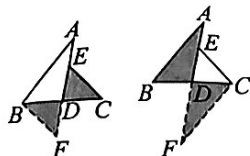
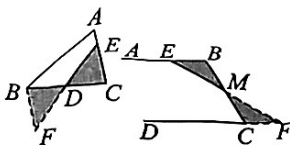
找一找图中的全等三角形.



名师点拨

四大倍长中线:

找一找这里的全等三角形吧.



是的，平行线的中点也可以像三角形那样，延长线段，构造全等三角形。

平行线的中点与三角形的中点是不是有一样的解决思路呢？

模型讲解

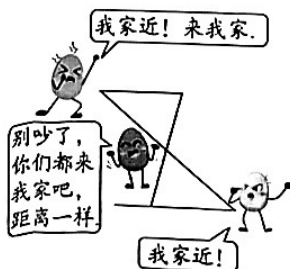
名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看

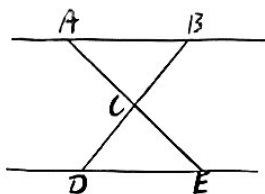


模型巧记

有中点，有平行，轻轻延长就能行。



【模型】如图， $AB \parallel DE$ ， C 是 BD 的中点，延长 AC 交 DE 于点 E ，则 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ 。



【证明】 $\because AB \parallel DE$,
 $\therefore \angle ABC = \angle EDC$.
 $\because C$ 是 BD 的中点,
 $\therefore CB = CD$.
 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 中,

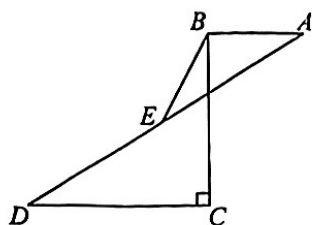
$$\begin{cases} \angle ABC = \angle EDC, \\ CB = CD, \\ \angle ACB = \angle ECD, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC (\text{ASA}).$

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $BC \perp CD$ ，且 $CD = 2AB = 12$ ， $BC = 8$ ， E 是 AD 的中点。

- (1) 请你用直尺(无刻度)作出一条线段与 BE 相等，并证明；
- (2) 求 BE 的长。



【解析】(1)如图,延长 BE 与 CD 相交于点 F , 则 $EF=BE$.

证明: $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A = \angle D, \angle ABE = \angle DFE$.

$\because E$ 是 AD 的中点,

$\therefore AE = DE$.

在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle ABE = \angle DFE, \\ AE = DE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEF (AAS)$,

$\therefore BE = EF$.

(2) $\because \triangle AEB \cong \triangle DEF$,

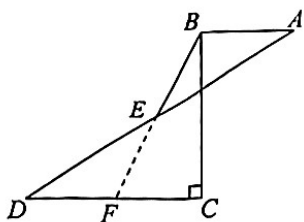
$\therefore DF = AB = 6, BE = EF = \frac{1}{2}BF$,

$\therefore CF = CD - DF = 6$.

$\because BC \perp CD$,

$\therefore BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = 10$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}BF = 5$.



名师点拨

平行+中点

延长构造全等

对应边角关系



名师点拨

已知
两角

找夹边 (ASA)

找其中一个已知
角的对边 (AAS)

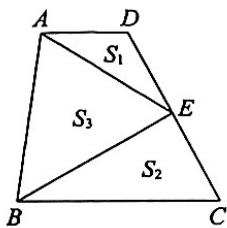
已知
一边
一角

边为角的对边,
找任意角 (AAS)

边为角的邻边, 找
边的对角 (AAS)

典例2 ☆☆☆☆☆

如图所示, 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, E 为 CD 的中点, 若用 S_1 , S_2, S_3 分别表示 $\triangle ADE$, $\triangle EBC$, $\triangle ABE$ 的面积, 则 S_1, S_2, S_3 的关系是().



A. $S_1 + S_2 > S_3$

B. $S_1 + S_2 = S_3$

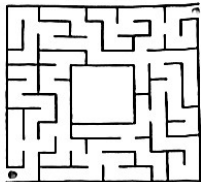
C. $S_1 + S_2 < S_3$

D. 以上都不对

【答案】B

趣味题目

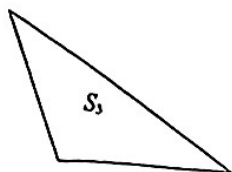
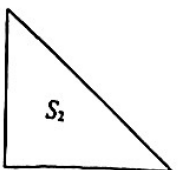
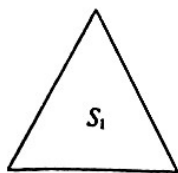
走一走





名师点拨

同底等高的三角形面积相等。



【解析】如图，延长 AE ，交 BC 的延长线于点 F 。

$\because AD \parallel BC$ ， E 为 CD 的中点，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$ ，

$\therefore E$ 是 AF 的中点，

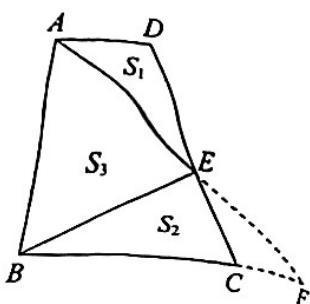
$\therefore AE = EF$ 。

$\therefore \triangle ABE$ 与 $\triangle BFE$ 是等底同高的两个三角形，

即它们的面积相等，

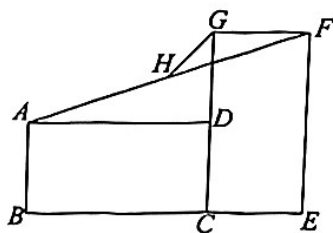
$\therefore S_{\triangle BFE} = S_1 + S_2 = S_3$ 。

故选 B。



典例3 ☆☆☆☆☆

矩形 $ABCD$ 与 $CEFG$ 如图放置，点 B, C, E 共线，点 C, D, G 共线，连接 AF ，取 AF 的中点 H ，连接 GH 。若 $BC = EF = 2$ ， $CD = CE = 1$ ，则 $GH = (\quad)$ 。



A. 1

B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】C

【解析】如图，延长 GH 交 AD 于点 P 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是矩形，

$\therefore \angle ADC = \angle ADG = \angle CGF = 90^\circ$ ， $AD = BC = 2$ ， $GF = CE = 1$ ，

$\therefore AD \parallel GF$ ， $\therefore \angle GFH = \angle PAH$ ，

又 $\because H$ 是 AF 的中点，形成了平行线中点模型，根据模型结论可知 $\triangle APH \cong \triangle FGH$ (ASA)，

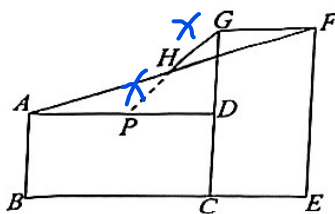
$\therefore AP = GF = 1$ ， $GH = PH = \frac{1}{2} PG$ ，

$\therefore PD = AD - AP = 1$ 。

$\because CG = 2$ ， $CD = 1$ ， $\therefore DG = 1$ ，

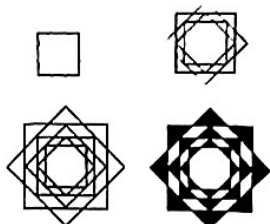
$\therefore GH = \frac{1}{2} PG = \frac{1}{2} \times \sqrt{PD^2 + DG^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故选 C。



美丽的平行图案

从第一个图出发，不断作平行线，你会得到一个美丽的图案。



是的，这种模型是中学几何中很常见的一种模型，它形似雨伞，所以被称为雨伞模型。我们一起来看看吧！

几何里竟然还有雨伞模型呢？真让人期待啊！

模型讲解

名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



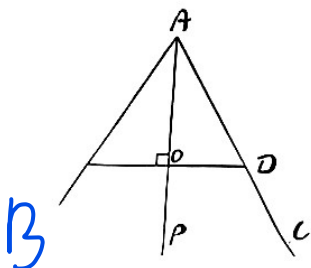
名师点拨

此图形像一把雨伞，故称雨伞模型。题目条件中有角平分线+垂直，延长构造全等，得到三角形全等和边的相等关系。

模型巧记

角平分线+垂线，轻轻延长等腰现。

【结论】如图， AP 是 $\angle BAC$ 的平分线， $BO \perp AP$ ，垂足为 O ，延长 BO 交 AC 于点 D ，则 $\triangle ABO \cong \triangle ADO$ ， $AB=AD$ ， $OB=OD$ 。



【证明】根据题意得，在 $\triangle ABO$ 与 $\triangle ADO$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAO = \angle DAO, \\ AO = AO, \\ \angle AOB = \angle AOD, \end{cases}$$

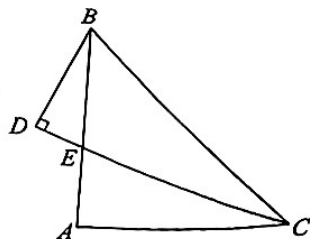
$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ADO$,
 $\therefore AB = AD, OB = OD$.

典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 E ， $\angle BDC=90^\circ$ 。

求证： $CE=2BD$ 。



这里有套路非常明显，角平分线，并且垂直于BD，则延长BD的一倍

【解析】如图，延长BD交CA的延长线于点F。

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\angle ACE + \angle AEC = 90^\circ.$$

$$\because \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BED = 90^\circ.$$

$$\because \angle AEC = \angle BED,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABF.$$

$$\text{又} \because AB = AC, \therefore \triangle ACE \cong \triangle ABF (\text{ASA}),$$

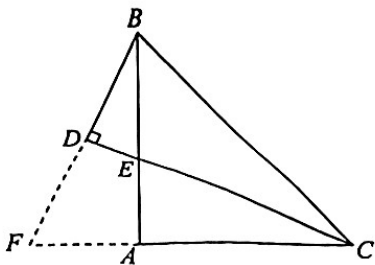
$$\therefore CE = BF.$$

$$\because CD \text{ 是 } \angle ACB \text{ 的平分线}, \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle BCD, \angle CDF = \angle CDB = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because CD = CD, \therefore \triangle CDF \cong \triangle CDB (\text{ASA}),$$

$$\therefore BD = FD = \frac{1}{2} BF. \therefore BD = \frac{1}{2} CE, \text{ 即 } CE = 2BD.$$



名师点拨

1 辅助线作法：角平分线 + 垂直 → 必延长。

2 这个图的本质：等腰三角形三线合一。



等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高“三线合一”。



名师点拨

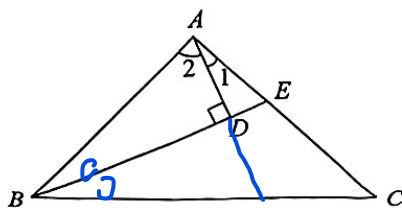
雨伞模型与等腰三角形的三线合一异同点：

1 图形一致；

2 题目所给条件不同。

典例2 ☆☆☆☆☆

如图，在 $\triangle ABC$ 中，BE是 $\angle ABC$ 的平分线， $AD \perp BE$ ，垂足为D，求证： $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$ 。



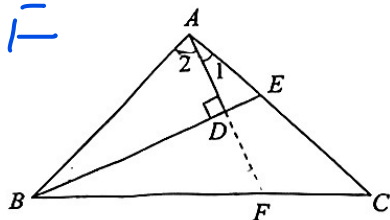
【解析】如图，延长AD交BC于点F。

$\because BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线， $AD \perp BE$ ，

$$\therefore AB = FB,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle AFB.$$

$$\because \angle AFB = \angle 1 + \angle C, \therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle C.$$



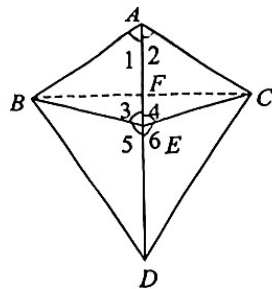
典例3 ☆☆☆☆☆

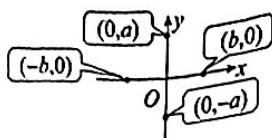
如图1，在平面直角坐标系中，直线AB分别交x轴、y轴于A(a, 0), B(0, b)两点，且a, b满足 $(a-b)^2 + |a-4t| = 0$ ，且 $t > 0$ ，t是常数，直线BD平分 $\angle OBA$ ，交x轴于点D。

(1)若AB的中点为M，连接OM交BD于点N，求证： $ON = OD$ ；

趣味题目

火眼金睛，找一找图中全等三角形。





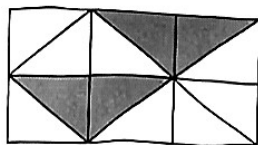
小小坐标真可爱，
对称点位置是相反，
x轴对称y相反，
y轴对称x相反。

两边长相等才是
等腰三角形。

两个角相等才是
等腰三角形。

趣味题目

涂一涂。



(1) 使涂色部分占整个

图形的 $\frac{1}{2}$ 。

(2) 使涂色部分占整个

图形的 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 如图2, 过点A作 $AE \perp BD$, 垂足为E, 猜想AE与BD间的关系, 并证明你的猜想。

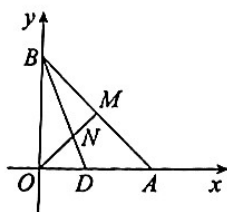


图1

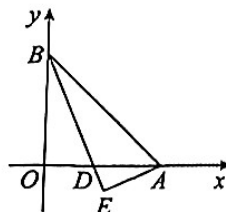


图2

【解析】(1) $\because$ 直线AB分别交x轴、y轴于A(a, 0), B(0, b)两点,

a, b 满足 $(a-b)^2 + |a-4t| = 0$, 且 $t > 0$,

$\therefore a = b = 4t$, $\therefore$ 点A, B的坐标是 $A(4t, 0)$, $B(0, 4t)$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形。

$\because M$ 是AB的中点, $\therefore OM \perp AB$.

$\because$ 直线BD平分 $\angle OBA$,

$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABO = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle OND = \angle BNM = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$

$\angle ODB = \angle ABD + \angle BAD = 22.5^\circ + 45^\circ = 67.5^\circ$,

$\therefore \angle OND = \angle ODB$, $\therefore ON = OD$ (等角对等边)。

(2) $BD = 2AE$ 。

理由如下: 如图, 延长AE交BO于点C。

$\because BD$ 平分 $\angle OBA$, $\therefore \angle ABD = \angle CBD$ 。

$\because AE \perp BD$ 于点E, $\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90^\circ$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CBD, \\ BE = BE, \\ \angle CEB = \angle AEB = 90^\circ, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$ (ASA),

$\therefore AE = CE$, $\therefore AC = 2AE$ 。

$\because AE \perp BD$, $\therefore \angle OAC + \angle ADE = 90^\circ$ 。

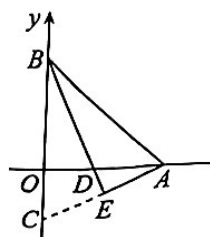
又 $\angle OBD + \angle BDO = 90^\circ$, $\angle ADE = \angle BDO$,

$\therefore \angle OAC = \angle OBD$ 。

在 $\triangle OAC$ 与 $\triangle OBD$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAC = \angle OBD, \\ OA = OB, \\ \angle AOC = \angle BOD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBD$ (ASA), $\therefore BD = AC$. $\therefore BD = 2AE$ 。



习秋

2011-10-11

其他图
端，形状

心中很常
形、三角形以及
出现过，它变化多
端，形状，是出题的好方向。

哇，我倒是很期待
见识一下半角模型
呢！

模型讲解



名师有话说

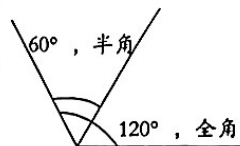
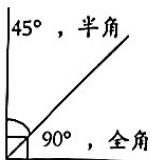
更多精彩内容
请扫码观看



名师小技巧

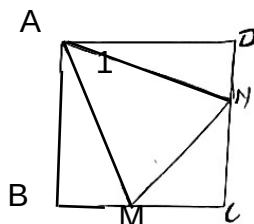
何为半角？

当一个角是另一个角大小的一半，而且这两个角的顶点相同时，我们会把这种模型叫做半角模型。如 45° 和 90° ，我们常常把 45° 叫半角， 90° 叫全角， 60° 和 120° ，我们常常把 60° 叫半角， 120° 叫全角。



【结论】(正方形中的半角模型) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ，则

- (1) $MN = BM + DN$;
- (2) $\triangle MCN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 边长的 2 倍;
- (3) MA 是 $\angle BMN$ 的平分线， NA 是 $\angle DNM$ 的平分线



【证明】延长 ND 至点 E ，使得 $DE = BM$ ，连接 AE ，如图。

$\because AB = AD, \angle B = \angle ADE, BM = DE,$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADE (\text{SAS}),$

$\therefore \angle BAM = \angle DAE, \angle AMB = \angle E, AM = AE.$

$\because \angle MAN = 45^\circ,$

$\therefore \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ,$

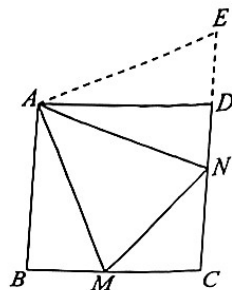
$\therefore \angle DAE + \angle DAN = \angle NAE = 45^\circ.$

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AEN$ 中，

$$\begin{cases} AM = AE, \\ \angle MAN = \angle EAN = 45^\circ, \\ AN = AN, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AEN (\text{SAS}),$

$\therefore MN = EN = DE + DN = BM + DN,$



$$\angle AMB = \angle AMN = \angle E, \angle ANM = \angle AND,$$

即 MA 是 $\angle BMN$ 的平分线, NA 是 $\angle DNM$ 的平分线.

$$CM + CN + MN = CM + BM + ND + CN = BC + CD = 2BC,$$

即 $\triangle MCN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 边长的 2 倍.

模型巧记

见半角, 旋全角, 盖半角, 得半角.

其他几何图形中的半角模型

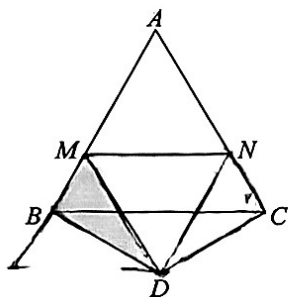
【结论 1】(等腰三角形中的半角模型) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且

$\angle BDC = 120^\circ$, 以 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 连接 MN , 则

(1) $MN = BM + CN$;

(2) $\triangle MAN$ 的周长等于 $\triangle ABC$ 边长的 2 倍;

(3) MD 是 $\angle BMN$ 的平分线, ND 是 $\angle CNM$ 的平分线.



【证明】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle BCD = \angle DBC = 30^\circ.$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ.$$

延长 AB 至点 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF , 如图.

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDN$ 中,

$$\begin{cases} DB = DC, \\ \angle DBF = \angle DCN, \\ BF = CN, \end{cases}$$

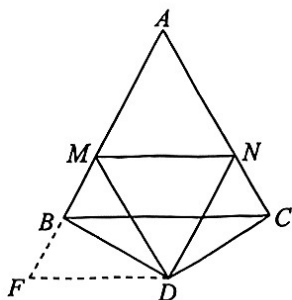
$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDN (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BDF = \angle CDN, \angle F = \angle CND, DF = DN.$$

$$\because \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ,$$



名师点拨

1 半角模型——两个角共顶点, 其中一个角是另外一个角的一半.

2 利用旋转+两次全等

证明结论.

注意: 辅助线中不能出现旋转这种字样.

名师小技巧

半角模型的解题步骤:

找旋转点 (含半角的角的顶点), 构造旋转图形

证全等

利用全等找边角关系

有兴趣的同学可以私下自己试着证明一下。



名师点拨

- 1 两次全等。
- 2 注意边角转化。



名师点拨

“半角模型”的特征：
1 共端点的等线段；
2 共顶点的倍半角。

即 $\angle FDM = 60^\circ = \angle MDN$ 。

在 $\triangle DMN$ 和 $\triangle DMF$ 中，

$$\begin{cases} DN = DF, \\ \angle MDN = \angle MDF, \\ DM = DM, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF (SAS)$ ，

$\therefore MN = MF = BM + CN$ ，

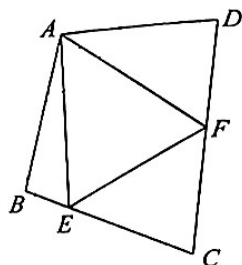
$\angle F = \angle MND = \angle CND$ ， $\angle FMD = \angle DMN$ ，

$\therefore \triangle AMN$ 的周长是 $AM + AN + MN = AM + MB + CN + AN = AB + AC = 2a$ 。

【结论 2】(对角互补且一组邻边相等的半角模型) 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $\angle BAD = 2\angle EAF$ ， $AB = AD$ ，则

(1) $EF = BE + FD$ ；

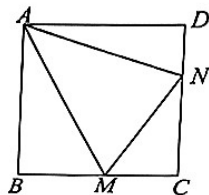
(2) EA 是 $\angle BEF$ 的平分线， FA 是 $\angle DFE$ 的平分线。



典例秒杀

典例1 ☆☆☆☆☆

如图，已知正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ，则线段 MN ， BM 与 DN 之间的关系是()。



- | | |
|-------------------|-------------------|
| A. $MN = BM + DN$ | B. $BM = MN + DN$ |
| C. $DN = MN + BM$ | D. 无法确定 |

【答案】A

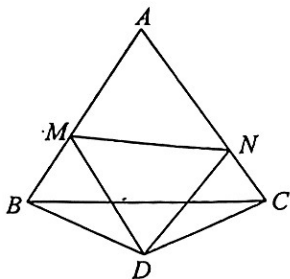
【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 根据半角模型结论可知 $MN = BM + DN$ 。

故选 A。

典例2 ☆☆☆☆☆

如图, $\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$, 以 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 连接 MN , 则 $\triangle AMN$ 的周长是().



- A. a B. $2a$ C. $3a$ D. 不能确定

【答案】B

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形, 观察图形, 能发现图形为等腰三角形的半角模型, 根据半角模型结论可知, $\triangle AMN$ 的周长为 $\triangle ABC$ 边长的 2 倍, 即为 $2a$.
故选 B.

典例3 ☆☆☆☆☆

(1) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 求证: $EF = BE + FD$.

(2) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, (1) 中的结论是否仍然成立? (不需要说明理由)

(3) 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 延长线上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请写出它们之间的数量关系, 并证明.

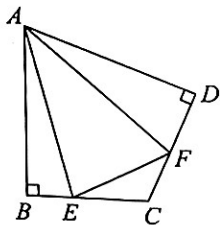


图 1

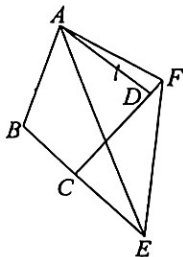
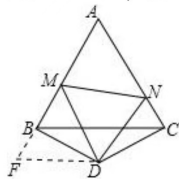


图 2

【解析】

$\because \triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = \angle DBC = 30^\circ$,
 $\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形,
 $\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ$,
延长 AB 至 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF ,



在 $Rt\triangle BDF$ 和 $Rt\triangle CND$ 中,
 $\begin{cases} BF = CN \\ DF = DN \end{cases}$
 $\therefore Rt\triangle BDF \cong Rt\triangle CND (HL)$,
 $\therefore \angle BDF = \angle CDN$, $DF = DN$,
 $\therefore \angle MDN = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ$,
 $\angle FDM = 60^\circ = \angle MDN$, DM 为公共边,
 $\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF (SAS)$,
 $\therefore MN = MF$,
 $\therefore \triangle AMN$ 的周长是:
 $AM + AN + MN = AM + MB + BF + AN = AB + AC = 2a$



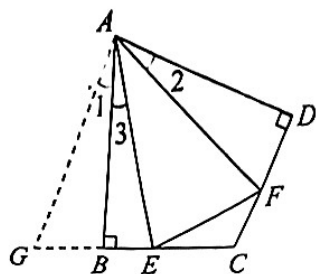
巧模型, 得结论,
解决问题 so easy.

趣味题目

涂一涂.



【解析】(1)如图,延长 EB 到点 G , 使 $BG=DF$, 连接 AG .



$$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}), \therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2.$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

$$\text{又 } AE = AE, \therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

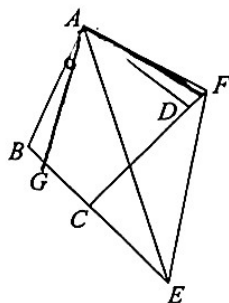
$$\therefore EG = EF.$$

$$\because EG = BE + BG, \therefore EF = BE + FD.$$

(2)(1)中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

(3)结论 $EF = BE + FD$ 不再成立, 应当是 $EF = BE - FD$.

证明: 如图, 在 BE 上截取 BG , 使 $BG = DF$, 连接 AG .



$$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF.$$

$$\text{又 } \because AB = AD, \therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF.$$

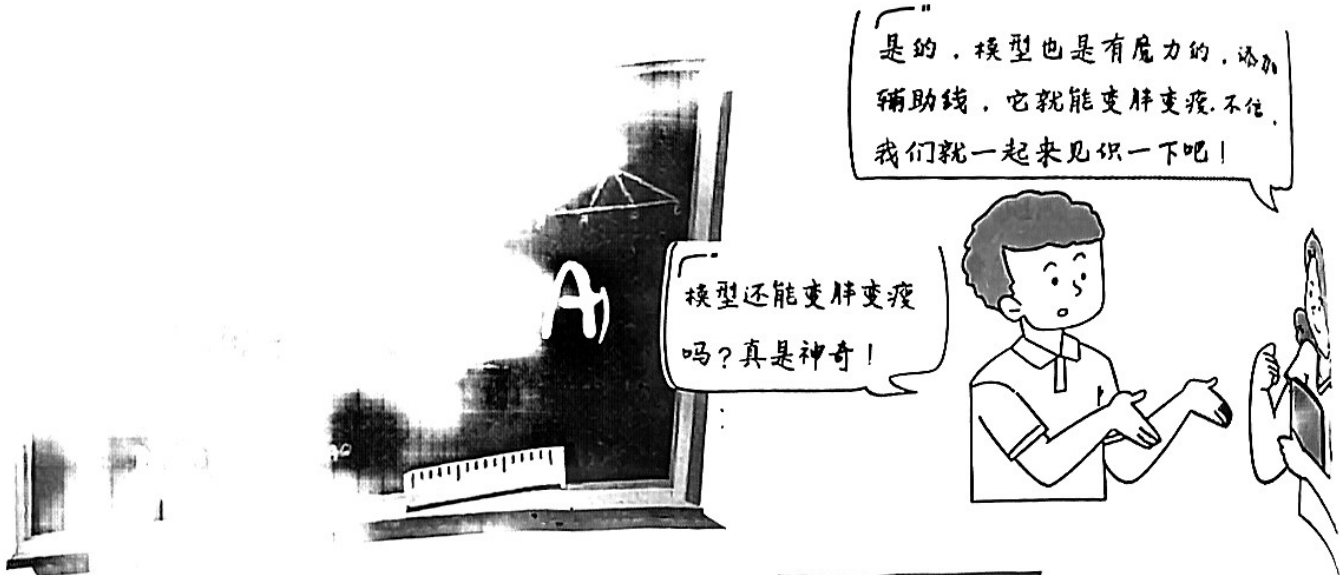
$$\therefore \angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

$$\text{又 } \because AE = AE, \therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore EG = EF.$$

$$\because EG = BE - BG, \therefore EF = BE - FD.$$



模型讲解

名师有话说

更多精彩内容
请扫码观看



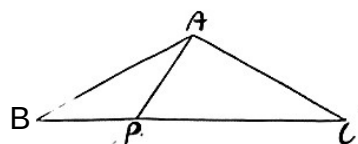
相当于 $\triangle ABP$ (加上 $\triangle APQ$) 变胖了，
变胖加等腰。



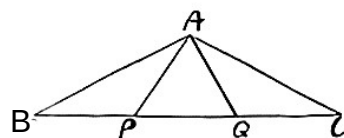
相当于 $\triangle ACP$ (减去 $\triangle APQ$) 变瘦了，
变瘦减等腰。



【模型】如图所示，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 P 在线段 BC 上且 P 不是 BC 的中点。



【结论1】(变胖) 如图所示，在 BC 上截取 $CQ=BP$ ，连接 AQ ， $\triangle ABQ \cong \triangle ACP$ (SAS)， $AP=AQ$ 。



【证明】 $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形， $AB=AC$ ， $\therefore \angle B = \angle C$ ，

又 $BP + PQ = CQ + PQ$ ， $\therefore BQ = CP$ 。

在 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle ACP$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle B=\angle C, \\ BQ=CP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle ACP$ (SAS)， $\therefore AP=AQ$ 。

【结论2】(变瘦) 如图所示，在 BC 上截取 $CQ=BP$ ，连接 AQ ， $\triangle ABP \cong \triangle ACQ$ (SAS)， $AP=AQ$ 。

